

Rotationseffekte in der Kristallplastizität

Am Fachbereich Bauingenieurwesen
der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des Grades eines

Doktors der Ingenieurwissenschaften
(Dr.-Ing.)

genehmigte

Dissertation

von

Dipl.-Ing. Carsten Bröse
aus Fulda

Hauptreferent:	Prof. Dr.-Ing. Ch. Tsakmakis
Korreferent:	Prof. Dr.-Ing. F. Gruttmann

Tag der Einreichung:	09.05.2007
Tag der mündlichen Prüfung:	29.06.2007

Darmstadt 2007
D17

Herausgeber:

Studienbereich Mechanik
Technische Universität Darmstadt
Hochschulstrasse 1
D-64289 Darmstadt
Germany

(c) Carsten Bröse
Dresdener Str. 2
36039 Fulda
Germany

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, dieses Buch ganz oder teilweise auf photomechanischem, elektronischem oder sonstigem Wege zu vervielfältigen.

Vorwort

Diese Arbeit wurde während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Mechanik der Technischen Universität Darmstadt angefertigt.

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr.-Ing. Ch. Tsakmakis, der die Arbeit anregte und mich auf vielfältige Weise unterstützte. Ebenso möchte ich Herrn Prof. Dr.-Ing. F. Gruttmann für die freundliche Übernahme des Korreferats und für das Interesse an dieser Arbeit danken.

Außerdem gilt mein Dank der Arbeitsgruppe "Kontinuumsmechanik" für die Anregungen zum Gestalten meiner Promotion und für die Unterstützung beim Verfassen der Arbeit.

Ganz besonders herzlich möchte ich meinen Eltern und meiner Schwester für die Unterstützung während meiner Promotion und für die Durchsicht der Arbeit danken.

Fulda, im Oktober 2007

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Grundlagen der Kristallographie	5
2.1	Grundlagen zur Beschreibung von Anisotropie	6
2.2	Herleitung des Elastizitätsgesetzes für kubische Symmetrie	7
3	Grundlagen der Kontinuumsmechanik	9
3.1	Kinematik	9
3.2	Zerlegung der Deformation	10
3.3	Konzept der dualen Variablen	11
3.4	Transformationsbeziehungen	13
4	Modellierung des Einkristalls	15
4.1	Zerlegung der Deformation	15
4.2	Darstellung des plastischen Geschwindigkeitsgradienten	16
4.2.1	Transformation der $\tilde{\mathbf{L}}_p^{(i)}$ auf die Zwischenkonfiguration	17
4.2.2	Transformation von $\tilde{\mathbf{L}}_p$ auf die Zwischenkonfiguration	17
4.3	Thermodynamik	18
4.3.1	Herleitung des Elastizitätsgesetzes	18
4.4	Gedanken zur Beschreibung der kinematischen und isotropen Verfestigung	22
4.4.1	Einführung des Versetzungsbegriffs	22
4.4.2	Versetzungsbildung und -auslöschung	23
4.4.3	Wechselwirkung von Versetzungen	24
4.5	Idee zur Beschreibung der kinematischen Verfestigung	26
4.6	Einbau des plastischen Anteils der Freien Energiefunktion in die Restun- gleichung	30
4.6.1	Fließregel für Viskoplastizität	30
4.6.2	Plastische Spins	31
4.6.3	Evolutionsgleichung für $\dot{\gamma}_k^{(i)}$	32
4.6.4	Berechnung des Verzerrungstensors $\hat{\mathbf{T}}_k^{(i)}$	35
5	Zusammenfassung des Einkristallmodells	37
6	Transformation des Modells auf die Momentankonfiguration	39
6.1	Transformation der Basisvektoren	39
6.1.1	Zeitliche Änderung der Basisvektoren	39
6.1.2	Herleitung der Gleichungen für $\frac{d}{dt}(\mathbf{R}_e \mathbf{\Phi})$ und $\frac{d}{dt}(\mathbf{R}_e \mathbf{\Delta}^{(i)})$	40
6.2	Transformation des Modells auf die Momentankonfiguration	42

7	Zusammenfassung der Gleichungen für kubische Symmetrie	47
8	Numerik	51
8.1	Euler Winkel	52
8.2	Parametrisierung der Tensoren $(\mathbf{R}_e \Phi)$ und $(\mathbf{R}_e \Delta^{(i)})$ mit Euler-Winkeln	53
8.2.1	Ableitungen der Tensoren $(\mathbf{R}_e \Phi)$ und $(\mathbf{R}_e \Delta^{(i)})$	53
9	Ergebnisse des Einkristallmodells	57
9.1	Grundlegendes zur einfachen Scherung	58
9.2	Rotation von einer Gleitebene beim elastisch-plastischen Körper	60
9.3	Rotation von zwei senkrecht aufeinander stehenden Gleitebenen	62
9.3.1	Einfache Scherung bei starrplastischem Körper	65
9.3.2	Einfache Scherung beim elastisch-plastischen Körper	67
9.4	Rotation von 12 Gleitebenen im kfz Gitter	69
9.4.1	Modellrechnungen ohne Kopplung	69
9.4.2	Kopplung in der isotropen Verfestigung	73
9.4.3	Kopplung in der kinematischen Verfestigung	79
9.4.4	Kopplung in der isotropen und kinematischen Verfestigung . . .	91
9.5	Vergleich mit Modellen aus der Literatur	96
9.5.1	Modell von Anand [1]	96
9.5.2	Modell von Asaro [3]	105
9.5.3	Weitere Kopplungsmöglichkeiten in der isotropen Verfestigung .	112
10	Polykristall-Modelle	137
10.1	Das Taylor Modell	137
10.2	Das Sachs Modell	138
10.3	Polfiguren	141
11	Numerische Rechnungen mit den Polykristall-Modellen	143
11.1	Spannungs-Dehnungs-Verhalten	143
11.2	Berechnung von Polfiguren	144
11.3	Polfiguren, ohne Kopplung	146
11.4	Polfiguren, Kopplung in isotroper Verfestigung	149
11.5	Polfiguren, Kopplung in kinematischer Verfestigung	152
11.6	Polfiguren, Kopplung in isotroper und kinematischer Verfestigung . . .	155
12	Zusammenfassung	159
A	Transformationen der Familie 1	161
A.1	Zerlegung der Verzerrungstensoren	161
A.2	Zerlegung der Verzerrungsgeschwindigkeiten	162
A.3	Spannungstensoren und deren Geschwindigkeiten	163
	Literaturverzeichnis	167

Symbolverzeichnis

Konfigurationen

- \mathcal{R}_R : Referenzkonfiguration
 $\hat{\mathcal{R}}_t$: Zwischenkonfiguration
 \mathcal{R}_t : Momentankonfiguration

Notation

- a : skalare Größe
 \mathbf{a} : vektorielle Größe ($\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$ bzgl. der Basis $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1 \dots 3$)
 \mathbf{A} : tensorielle Größe 2. Stufe ($\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ bzgl. der Basis $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1 \dots 3$)
 $()^{(i)}$: Größe bezieht sich auf das (i)-te Gleitsystem
 $\tilde{()}$: Größe bezieht sich auf die Referenzkonfiguration \mathcal{R}_R
 $\hat{()}$: Größe bezieht sich auf die Zwischenkonfiguration $\hat{\mathcal{R}}_t$

Multiplikationen

- $a = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$: Skalarmultiplikation zwischen vektoriellen Größen ($a = x_i y_i$)
 $\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x}$: Multiplikation zw. Tensor 2. Stufe und Vektor ($y_i = A_{ij} x_j$)
 $\mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{B}$: Multiplikation zw. zwei Tensoren 2. Stufe ($C_{ij} = A_{ik} B_{kj}$)
 $a = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$: Skalarmultiplikation zw. Tensoren 2. Stufe ($a = A_{ij} B_{ij}$)
 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{B}^T) = \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B})$

Vektorielle Größen

- $\tilde{\mathbf{s}}^{(i)}, \tilde{\mathbf{n}}^{(i)}$: Basisvektoren des (i)-ten Gleitsystems in \mathcal{R}_R
 $\hat{\mathbf{s}}^{(i)}, \hat{\mathbf{n}}^{(i)}$: Basisvektoren des (i)-ten Gleitsystems in $\hat{\mathcal{R}}_t$
 $\mathbf{s}^{(i)}, \mathbf{n}^{(i)}$: Basisvektoren des (i)-ten Gleitsystems in \mathcal{R}_t
 \mathbf{X} : Ortsvektor des materiellen Punktes X in \mathcal{R}_R
 \mathbf{x} : Ortsvektor des materiellen Punktes X in \mathcal{R}_t
 $d\mathbf{X}$: materielles Linienelement in \mathcal{R}_R
 $d\hat{\mathbf{x}}$: Linienelement in $\hat{\mathcal{R}}_t$
 $d\mathbf{x}$: materielles Linienelement in \mathcal{R}_t

Skalare Größen

$b^{(i)}$: Materialparameter : Beschreibt die Abweichung der plastischen Scherung des gestörten Gitters $\gamma_k^{(i)}$ von der plastischen Scherung des idealen Gitters $\gamma_p^{(i)}$
$\beta^{(i)}$: Materialparameter in der Evolutionsgleichung für die Dehnung $r^{(i)}$ in der isotropen Verfestigung
C_1^e	: Materialparameter im Elastizitätsgesetz
C_2^e	: Materialparameter im Elastizitätsgesetz
C_3^e	: Materialparameter im Elastizitätsgesetz
C_1^k	: Materialparameter im Spannungsgesetz der kinematischen Verfestigung
C_2^k	: Materialparameter im Spannungsgesetz der kinematischen Verfestigung
C_3^k	: Materialparameter im Spannungsgesetz der kinematischen Verfestigung
$\gamma_p^{(i)}$: Plastische Scherung im (i)-ten Gleitsystem
$\dot{\gamma}_p^{(i)}$: Plastische Scherrate im (i)-ten Gleitsystem
$\gamma_k^{(i)}$: Plastische Scherung des (i)-ten Gleitsystems um eine Störstelle (Dient zur Entwicklung der lokalen Verzerrung $\hat{\mathbf{r}}_k^{(i)}$ des Gitters um eine Störstelle)
$\dot{\gamma}_k^{(i)}$: Plastische Scherrate des (i)-ten Gleitsystems um eine Störstelle
$\gamma_r^{(i)}$: Plastische Scherung des inelastischen Rest-Anteils der Deformation (Bewegung von Atomlagen) im (i)-ten Gleitsystem. ($\gamma_p^{(i)} = \gamma_k^{(i)} + \gamma_r^{(i)}$)
$\zeta^{(i)}$: Materialparameter in der Gleichung für $R^{(i)}$
$\eta^{(i)}$: Materialparameter : Viskosität
θ_e	: Rotationswinkel des idealen Gitters
$\theta_k^{(i)}$: Gemittelter Rotationswinkel des (i)-ten Gleitsystems um eine lokale Störung
$k_0^{(i)}$: Materialparameter : Konstanter Anteil der Isotropen Verfestigung
$k^{(i)}$: Isotrope Verfestigung ($k^{(i)} = k_0^{(i)} + R^{(i)}$)
$\kappa^{(i)}$: Materialparameter in der gekoppelten Spannung der kinematischen Verfestigung $\mathbf{Z}_{gekoppelt}$
$\lambda_\Delta^{(i)}$: Materialparameter : Abweichung der Rotation des Gitters um eine Störstelle von der Rotation des idealen Gitters
$m^{(i)}$: Materialparameter : Exponent in der viskoplastischen Fließregel
$\xi^{(i)}$: Kinematische Verfestigung im (i)-ten Gleitsystem ($\xi^{(i)} = \hat{\mathbf{s}}^{(i)} \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(i)} \hat{\mathbf{n}}^{(i)}$)
q	: Kopplungsparameter in der isotropen und kinematischen Verfestigung (Beschreibt die latente Verfestigung ($q > 1.0$))
$R^{(i)}$: Variabler Anteil der isotropen Verfestigung
$r^{(i)}$: Thermodynamisch konjugierte Dehnung zu $R^{(i)}$
ρ_R	: Dichte
$\dot{s}^{(i)}$: Betrag der plastischen Scherrate im (i)-ten Gleitsystem
$\tau^{(i)}$: Schubspannung im (i)-ten Gleitsystem ($\tau^{(i)} = \hat{\mathbf{s}}^{(i)} \cdot \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{n}}^{(i)}$)
$\hat{\chi}$: Konvexe Funktion zur Beschreibung der Abweichung der Rotation des Gitters um eine Störstelle von der Rotation des idealen Gitters
ψ	: Spezifische Freie Energie
ψ_e	: Elastischer Anteil der spezifischen Freien Energie
ψ_{kin}	: Energie des verzerrten Gitters infolge der kinematischen Verfestigung
ψ_{is}	: Energie des verzerrten Gitters infolge der isotropen Verfestigung

Tensorielle Größen 2. Stufe

\mathbf{A}	: Almansischer Verzerrungstensor in \mathcal{R}_t
\mathbf{A}_e	: Elastischer Anteil des Almansischen Verzerrungstensors
\mathbf{A}_p	: Plastischer Anteil des Almansischen Verzerrungstensors
$\hat{\mathbf{\Gamma}}$: Verzerrungstensor in $\hat{\mathcal{R}}_t$
$\hat{\mathbf{\Gamma}}_e$: Elastischer Anteil von $\hat{\mathbf{\Gamma}}$
$\tilde{\mathbf{\Gamma}}_e$: Elastischer Anteil von $\hat{\mathbf{\Gamma}}$ auf \mathcal{R}_R transformiert
$\hat{\mathbf{\Gamma}}_p$: Plastischer Anteil von $\hat{\mathbf{\Gamma}}$
$\hat{\mathbf{\Gamma}}_k$: Verzerrungstensor zur Beschreibung der lokalen Verzerrung des Gitters um eine Störstelle ($\hat{\mathbf{\Gamma}}_k = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \hat{\mathbf{V}}_k)^{-2}$)
$\tilde{\mathbf{\Gamma}}_k$: Auf \mathcal{R}_R transformierter Verzerrungstensor $\hat{\mathbf{\Gamma}}_k$ ($\tilde{\mathbf{\Gamma}}_k = \Delta^T \hat{\mathbf{\Gamma}}_k \Delta$)
$\mathbf{\Gamma}_k$: Auf die Momentankonfiguration \mathcal{R}_t transformierter Verzerrungstensor $\hat{\mathbf{\Gamma}}_k$
$\hat{\mathbf{\Gamma}}_r$: Verzerrungstensor zur Beschreibung der inelastischen Restdeformationen ($\hat{\mathbf{\Gamma}}_p = \hat{\mathbf{\Gamma}}_k + \hat{\mathbf{\Gamma}}_r$)
\mathbf{D}	: Symmetrischer Anteil des Geschwindigkeitsgradienten \mathbf{L}
$\hat{\mathbf{D}}_p$: Symmetrischer Anteil des plastischen Geschwindigkeitsgradienten $\hat{\mathbf{L}}_p$ in $\hat{\mathcal{R}}_t$
$\hat{\mathbf{D}}_r$: Untere Oldroyd-Ableitung von $\hat{\mathbf{\Gamma}}_r$ ($\hat{\mathbf{D}}_r = \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{\Gamma}}}_r$)
Δ	: Orthogonaler Tensor ($\Delta^{-1} = \Delta^T$) (Rotationstensor des gestörten Gitters um eine Störstelle in $\hat{\mathcal{R}}_t$)
\mathbf{E}	: Greenscher Verzerrungstensor in \mathcal{R}_R
\mathbf{E}_e	: Elastischer Anteil des Greenschen Verzerrungstensors
\mathbf{E}_p	: Plastischer Anteil des Greenschen Verzerrungstensors
\mathbf{E}_k	: Verzerrungstensor in \mathcal{R}_R aufgrund der lokalen Deformation \mathbf{F}_k des Gitters um eine Störstelle. Dient zur Herleitung von $\hat{\mathbf{\Gamma}}_k$ ($\hat{\mathbf{\Gamma}}_k = \mathbf{F}_p^{T-1} \mathbf{E}_k \mathbf{F}_p^{-1}$)
\mathbf{E}_r	: Verzerrungstensor in \mathcal{R}_R aufgrund der inelastischen Restdeformation $\tilde{\mathbf{F}}_r$ ($\mathbf{E}_r = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{F}}_r^T \tilde{\mathbf{F}}_r - \mathbf{1})$)
\mathbf{F}	: Deformationsgradient ($\mathcal{R}_R \rightarrow \mathcal{R}_t$)
\mathbf{F}_e	: Elastischer Anteil des Deformationsgradienten ($\hat{\mathcal{R}}_t \rightarrow \mathcal{R}_t$)
\mathbf{F}_p	: Plastischer Anteil des Deformationsgradienten ($\mathcal{R}_R \rightarrow \hat{\mathcal{R}}_t$)
$\tilde{\mathbf{F}}_p$: Mit Φ zurückgedrehtes \mathbf{F}_p ($\tilde{\mathbf{F}}_p = \Phi^T \mathbf{F}_p$)
\mathbf{F}_k	: Anteil von \mathbf{F}_p für die kinematische Verfestigung ($\mathbf{F}_p = \mathbf{F}_k \mathbf{F}_r$). (Beschreibt die lokale Deformation des Gitters um eine Störstelle)
\mathbf{F}_r	: Inelastischer Restanteil von \mathbf{F}_p ($\mathbf{F}_p = \mathbf{F}_k \mathbf{F}_r$)
\mathbf{L}	: Geschwindigkeitsgradient
\mathbf{L}_p	: Plastischer Geschwindigkeitsgradient in \mathcal{R}_t
$\tilde{\mathbf{L}}_p$: Plastischer Geschwindigkeitsgradient in \mathcal{R}_R
$\hat{\mathbf{L}}_p$: Plastischer Geschwindigkeitsgradient in $\hat{\mathcal{R}}_t$
$\tilde{\mathbf{M}}_{ij}$: Allgemeiner Strukturtensor in \mathcal{R}_R ($\tilde{\mathbf{M}}_{ij} = \tilde{\mathbf{e}}_i \otimes \tilde{\mathbf{e}}_j$)
\mathbf{M}_{ij}	: Allgemeiner Strukturtensor in \mathcal{R}_t ($\mathbf{M}_{ij} = (\mathbf{O}\tilde{\mathbf{e}}_i) \otimes (\mathbf{O}\tilde{\mathbf{e}}_j)$)
$\hat{\mathbf{M}}_{ij}^e$: Struktur tensoren im Elastizitätsgesetz in $\hat{\mathcal{R}}_t$ ($\hat{\mathbf{M}}_{ij}^e = (\Phi\tilde{\mathbf{e}}_i) \otimes (\Phi\tilde{\mathbf{e}}_j)$)
\mathbf{M}_{ij}^e	: Struktur tensoren im Elastizitätsgesetz in \mathcal{R}_t ($\mathbf{M}_{ij}^e = ((\mathbf{R}_e\Phi)\tilde{\mathbf{e}}_i) \otimes ((\mathbf{R}_e\Phi)\tilde{\mathbf{e}}_j)$)
$\hat{\mathbf{M}}_{rs}^k$: Struktur tensoren im Spannungsgesetz für die kinematische Verfestigung in $\hat{\mathcal{R}}_t$ ($\hat{\mathbf{M}}_{rs}^k = (\Delta\tilde{\mathbf{e}}_r) \otimes (\Delta\tilde{\mathbf{e}}_s)$)
\mathbf{M}_{rs}^k	: Struktur tensoren im Spannungsgesetz für die kinematische Verfestigung in \mathcal{R}_t ($\mathbf{M}_{rs}^k = ((\mathbf{R}_e\Delta)\tilde{\mathbf{e}}_r) \otimes ((\mathbf{R}_e\Delta)\tilde{\mathbf{e}}_s)$)

\mathbf{O}	: Allgemeiner orthogonaler Tensor ($\mathbf{O}^T = \mathbf{O}^{-1}$)
$\hat{\mathbf{\Omega}}_e$: Elastischer Anteil des plastischen Spins ($\hat{\mathbf{W}}_p - \dot{\mathbf{\Phi}}\mathbf{\Phi}^T$)
$\hat{\mathbf{\Omega}}_k$: Kinematischer Anteil des plastischen Spins ($\hat{\mathbf{W}}_p - \hat{\mathbf{\Delta}}\mathbf{\Delta}^T$)
$\hat{\mathbf{P}}$: Mandelscher Spannungstensor in \mathcal{R}_t ($\hat{\mathbf{P}} = (\mathbf{1} + 2\hat{\mathbf{\Gamma}}_e)\hat{\mathbf{T}}$)
$\hat{\mathbf{P}}_S$: Symmetrischer Anteil des Mandelschen Spannungstensors
$\hat{\mathbf{P}}_A$: Antisymmetrischer Anteil des Mandelschen Spannungstensors
\mathbf{q}	: (12x12)-Kopplungsmatrix in der isotropen und kinematischen Verfestigung
\mathbf{R}	: Rotationstensor aus der polaren Zerlegung von \mathbf{F} ($\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$)
\mathbf{R}_e	: Rotationstensor aus der polaren Zerlegung von \mathbf{F}_e
\mathbf{R}_k	: Rotationstensor aus der polaren Zerlegung von \mathbf{F}_k
$(\mathbf{R}_e\mathbf{\Phi})$: Orthogonaler Tensor, Rotiert Vektoren von \mathcal{R}_R auf \mathcal{R}_t . (Beschreibt die Rotation des idealen Gitters)
$(\mathbf{R}_e\mathbf{\Delta})$: Orthogonaler Tensor, Rotiert Vektoren von \mathcal{R}_R auf \mathcal{R}_t . (Beschreibt die Rotation des gestörten Gitters um eine Störstelle)
\mathbf{S}	: Gewichteter Cauchy Spannungstensor in \mathcal{R}_t ($\mathbf{S} = \det \mathbf{F} \mathbf{T}$)
\mathbf{T}	: Cauchy Spannungstensor in \mathcal{R}_t
$\hat{\mathbf{T}}$: Spannungstensor in $\hat{\mathcal{R}}_t$
$\tilde{\mathbf{T}}$: 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor in \mathcal{R}_R
\mathbf{U}	: Rechter Strecktensor aus der polaren Zerlegung von \mathbf{F}
\mathbf{U}_e	: Rechter Strecktensor aus der polaren Zerlegung von \mathbf{F}_e
$\mathbf{\Phi}$: Orthogonaler Tensor ($\mathbf{\Phi}^{-1} = \mathbf{\Phi}^T$, $\det \mathbf{\Phi} = 1$), $\mathbf{\Phi} \in \text{SO}(3)$ Rotationstensor des idealen Gitters in $\hat{\mathcal{R}}_t$
\mathbf{V}	: Linker Strecktensor aus der polaren Zerlegung von \mathbf{F}
\mathbf{V}_e	: Linker Strecktensor aus der polaren Zerlegung von \mathbf{F}_e
$\hat{\mathbf{V}}_k$: Linker Strecktensor aus der polaren Zerlegung von \mathbf{F}_k
\mathbf{W}	: Antisymmetrischer Anteil des Geschwindigkeitsgradienten \mathbf{L}
$\hat{\mathbf{W}}_p$: Antisymmetrischer Anteil des plastischen Geschwindigkeitsgradienten $\hat{\mathbf{L}}_p$
$\hat{\mathbf{\xi}}$: Translationstensor der kinematischen Verfestigung ($\hat{\mathbf{\xi}} = (\mathbf{1} - 2\hat{\mathbf{\Gamma}}_k)\hat{\mathbf{Z}}$)
$\hat{\mathbf{\xi}}_A$: Antisymmetrischer Anteil von $\hat{\mathbf{\xi}}$
$\hat{\mathbf{Z}}$: Spannungstensor der kinematischen Verfestigung in $\hat{\mathcal{R}}_t$ (Beschreibt das lokal um eine Störstelle vorliegende Spannungsfeld)
\mathbf{Z}	: Auf \mathcal{R}_t transformierter Spannungstensor der kinematischen Verfestigung

Tensorielle Größen 4. Stufe

\mathbb{C}_i	: Elastizitätstensor im (i)-ten Korn eines Polykristalls
\mathbb{E}	: Elastizitätstensor
\mathbb{K}	: Positiv definiter Tensor zur Herleitung der Evolutionsgleichung für $\gamma_k^{(i)}$

Ableitungen

\dot{x}	: normale Zeitableitung $\frac{d}{dt} x$
$\overset{\Delta}{\mathbf{X}}$: untere Oldroyd Ableitung $\overset{\Delta}{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{L}^T \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{L}$

Kurzfassung

Materialien aus Einkristall-Legierungen werden in vielen Industrie-Anwendungen verwendet. In der Luftfahrt-Industrie z.B. werden Turbinenschaufeln aus Nickel-Einkristall Superlegierungen hergestellt. Diese Superlegierungen halten höhere Temperaturen aus und reduzieren somit den Treibstoffverbrauch. Deshalb ist es wichtig, das mechanische Verhalten der Einkristalle so gut wie möglich beschreiben zu können.

Der Zweck dieser Arbeit ist die Entwicklung einer thermodynamisch konsistenten Theorie für Einkristall Viskoplastizität für das "face centered cubic" (f.c.c.) Kristallsystem. Die Theorie beinhaltet isotrope und kinematische Verfestigung. Danach werden einige Runge-Kutta Rechnungen für einfache Scherung durchgeführt. Das Augenmerk wird dabei auf die Rotation der Achsen während der Deformation gelegt. Rechnungen mit ungekoppelter isotroper oder kinematischer Verfestigung zeigen unbegrenzte Rotation der Achsen und somit einen periodischen Spannungs-Dehnungs Verlauf. Dieses Verhalten ist aber unphysikalisch, da sich das Kristallgitter im Einkristall nicht unbegrenzt drehen kann. Deshalb werden "Kopplungseffekte" in die Verfestigungsgleichungen eingeführt. Dadurch können die Gitterrotationen sinnvoll stabilisiert werden. Innerhalb dieser Arbeit werden mehrere Beispiele von Kopplungen aufgezeigt.

Nach der Behandlung der Einkristall Mechanik wird das mechanische Verhalten von Polykristallen mithilfe des "Taylor-Modells" simuliert. Da der wichtigste physikalische Prozeß für die anisotrope plastische Materialantwort eines polykristallinen Metalls die Reorientierung des Kristallgitters der einzelnen Körner ist, wird die hier entwickelte Theorie für Einkristalle auf Polykristalle angewendet. Es wird die Entwicklung der kristallographischen Textur jeweils mit und ohne Kopplungseffekte in den Verfestigungsgleichungen untersucht. Als ein Resultat erhält man "Ideale Scher Texturen" bei Verfestigung mit Kopplungseffekten.

Abstract

Materials made of single-crystal alloys are widely used in modern industry applications. In airplane industry e.g. turbine blades are made of nickel based single-crystal superalloys. These superalloys can sustain higher temperatures and reduce so fuel consumption. Therefore it is important to describe the mechanical behavior of single-crystals as good as possible.

The purpose of this work is to develop a thermodynamically consistent theory of single-crystal viscoplasticity for face centered (f.c.c.) crystals. This theory involves isotropic and kinematic hardening. After presenting the theory, several Runge-Kutta calculations for simple shear deformations are done. Attention is turned to the rotation of the axis during deformation. Calculations with uncoupled isotropic or kinematic hardening show infinite rotation of the crystal axis during shear and therefore periodic stress strain curves. This behavior is unphysically, because the crystal lattice in a single crystal cannot do infinite rotation. Therefore "coupling effects" are introduced into the hardening equations and the rotations of the lattice can be stabilized. In this work, several examples for introducing coupling effects are presented.

After dealing with single-crystal mechanics, the "Taylor model" is used to simulate the mechanical behavior of polycrystals. Since the most important physical process for

anisotropic plastic response in polycrystalline metals is the reorientation of the crystal lattice of grains, the developed theory for single crystals is applied to polycrystals to investigate the development of the crystallographic texture, both with uncoupled and coupled effects in the hardening equations. As one result with coupled hardening one can obtain "ideal shear textures".

Kapitel 1

Einleitung

Zur sinnvollen technischen Nutzung von Metallen ist es notwendig, ihre innere Struktur und ihre Materialantwort auf äußere Einflüsse zu verstehen. In dieser Arbeit wird ein weiteres Materialmodell zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens von Einkristallen mit kubisch-flächenzentriertem ("f.c.c.") Kristallsystem vorgestellt. Diese Metalle treten z.B. als Nickel-Basislegierungen in Turbinenschaufeln in der Luft- und Raumfahrttechnik auf.

Zuerst wird ein thermodynamisch konsistentes Materialmodell für Einkristall-Plastizität, sowie Gleichungen für isotrope und kinematische Verfestigung, hergeleitet. Besonderes Augenmerk wird dabei auf den sogenannten *plastischen Spin* gelegt. In der phänomenologischen Materialmodellierung dient der plastische Spin zur Beschreibung der Evolution der Anisotropieachsen (siehe z.B. Dafalias und Rashid, 1989; Van der Giesen und andere, 1992; Bunge und Nielsen, 1997; Song und Voyiadjis, 2002; Gurtin und Anand, 2005). In der Kristall-Plastizität ist der plastische Spin ein wichtiges Element um die Rotation des Kristallgitters zu beschreiben (siehe z.B. Havner, 1981; Tóth und andere, 1988, 1990; Aravas und Aifantis, 1991; Dafalias, 1998; Van Houtte, 2002).

Es sind drei Arten von Rotationen zu unterscheiden:

1. Der *Materielle Spin* \mathbf{W} als antisymmetrischer Anteil des Geschwindigkeitsgradienten \mathbf{L} .
2. Der *Plastische Spin* als antisymmetrischer Anteil des plastischen Geschwindigkeitsgradienten $\hat{\mathbf{\Omega}}_e = \hat{\mathbf{W}}_p - \mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^T$.
3. Der Spin des Kristallgitters (*Lattice Spin*) $\mathbf{W} - \mathbf{\Omega}_e$ als Differenz des Materiellen und Plastischen Spins (Havner, 1972).

Zusätzlich zur Rotation des ungestörten idealen Gitters wird in dieser Arbeit noch ein *lokaler lattice Spin* $\hat{\mathbf{\Omega}}_k$ eingeführt, der die Rotation des lokal gestörten Gitters um Störstellen beschreibt. Diese Störstellen im idealen Gitter können z.B. Leerstellen, zusätzliche Atome oder fremde Ersatzatome im Kristallgitter sein. Diese lokalen Störungen dienen u.a. auch als Quellen von *Versetzungen* (Frank-Read-Quellen).

Durch äußere Belastungen erzeugen die Frank-Read-Quellen neue Versetzungslinien, die dann im weiteren Verlauf in Versetzungsringe übergehen können und sich weiter im Material ausbreiten. Da im allgemeinen die lokalen Störungen räumlich gleichmäßig

verteilt im Material auftreten, werden dadurch bei Belastung gleichmäßig neue Versetzungen im Material erzeugt. Durch die neu erzeugten Versetzungen wird die Bewegung von bereits im Material vorhandenen Versetzungen behindert. Insbesondere wird so das Gleiten von Versetzungen entlang von Gleitebenen erschwert und das Material wird fester. Da dieser Verfestigungseffekt durch die isotrope, räumlich gleichmäßige Behinderung von mobilen Versetzungen an bereits vorhandenen Versetzungen hervorgerufen wird, heißt diese Verfestigung auch *isotrope Verfestigung*. Sie ist von der Richtung der Belastung unabhängig.

Durch die gegenseitige Interaktion von Versetzungen untereinander kann es beim Gleiten passieren, daß sich mehrere Versetzungen vor einer oder mehreren lokalen Störstellen aufstauen und dadurch das Gleiten in dieser Richtung erschwert wird. Dadurch wird das Material in dieser Belastungsrichtung fester. Zur Beschreibung dieser Verfestigungsart wird ein *Translationstensor der kinematischen Verfestigung* eingeführt, der die besondere Richtungsabhängigkeit dieser Verfestigung beschreibt.

Es folgen numerische Rechnungen zur Einfachen Scherung. Dort wird für kubisch flächenzentrierte Einzelkristalle der Spin des Kristallgitters ausgiebig untersucht. Dabei stellt man fest, daß bei einfacher Scherung das Kristallgitter fortlaufend rotiert. Die Rotationsgeschwindigkeit wird im wesentlichen durch den antisymmetrischen Anteil des Geschwindigkeitsgradienten vorgegeben. Dies wirft aber ein Problem auf, da sich ein Kristallgitter eines Einkristalls in der Natur bei einfacher Scherung nicht fortlaufend um die eigene Achse drehen kann und somit hier eine Schwäche in der Modellierung der Kristallplastizität für ein kubisch flächenzentriertes Kristallgitter auftritt. Die fortlaufende Rotation des Gitters resultiert aus der Symmetrie des kubischen Kristalls, der nach einer Drehung von 90° um eine Hauptachse wieder die gleichen mechanischen Eigenschaften aufweist.

Ziel dieser Arbeit ist es, die Symmetrie des kubisch-flächenzentrierten Kristallgitters in den Materialgleichungen so zu brechen, daß die Rotation des Gitters zum Stillstand kommt. Dies geschieht durch Einführung von *"Kopplungseffekten"* in der isotropen und kinematischen Verfestigung. Dadurch lassen sich die Rotation der Achsen bei einfacher Scherung stabilisieren. Das so erweiterte Materialmodell wird mit bekannten Modellen aus der Literatur von Asaro ([3]) und Anand ([1]) verglichen.

Nach der Behandlung des Verhaltens von Einkristallen wird das mechanische Verhalten von Polykristallen mithilfe des "Taylor-Modells" simuliert. Da der wichtigste physikalische Prozeß für die anisotrope plastische Materialantwort eines polykristallinen Metalls die Reorientierung des Kristallgitters der einzelnen Körner ist, wird die hier entwickelte Theorie für Einkristalle auf Polykristalle angewendet. Es wird die Entwicklung der kristallographischen Textur jeweils mit und ohne Kopplungseffekte in den Verfestigungsgleichungen untersucht. Als ein Resultat erhält man "Ideale Scher Texturen" bei Verfestigung mit Kopplungseffekten.

Kapitel 2

Grundlagen der Kristallographie

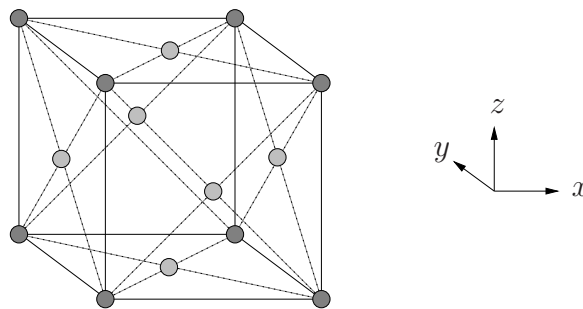


Abbildung 2.1: Kubisch flächenzentriertes (fcc) Kristallsystem

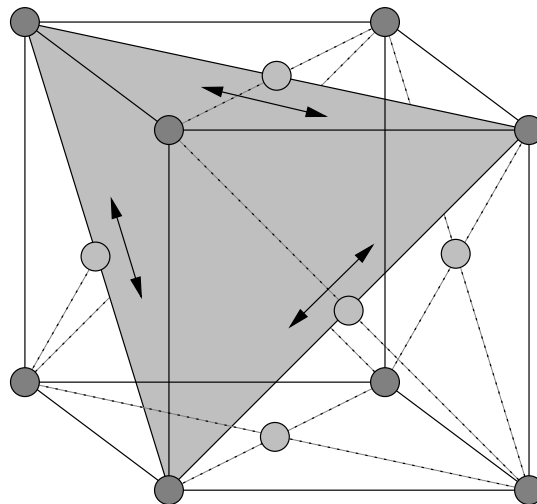


Abbildung 2.2: Gleitebene mit Gleitrichtungen im kubisch flächenzentrierten (fcc) Kristallsystem

Als ein *Gleitsystem* wird das Paar $\{\mathbf{s}, \mathbf{n}\}$ bezeichnet, wobei \mathbf{n} die Einheitsnormale der Gleitebene und \mathbf{s} die Gleitrichtung bezeichnet.

In einem kubisch-flächenzentrierten Kristallsystem existieren die 12 Gleitsysteme

$$\begin{array}{ll}
1.) & \mathbf{n}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T & \mathbf{s}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1)^T \\
2.) & \mathbf{n}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T & \mathbf{s}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^T \\
3.) & \mathbf{n}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T & \mathbf{s}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)^T \\
4.) & \mathbf{n}^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1)^T & \mathbf{s}^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)^T \\
5.) & \mathbf{n}^{(5)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1)^T & \mathbf{s}^{(5)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, -1)^T \\
6.) & \mathbf{n}^{(6)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1)^T & \mathbf{s}^{(6)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T \\
7.) & \mathbf{n}^{(7)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)^T & \mathbf{s}^{(7)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1)^T \\
8.) & \mathbf{n}^{(8)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)^T & \mathbf{s}^{(8)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, -1)^T \\
9.) & \mathbf{n}^{(9)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)^T & \mathbf{s}^{(9)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T \\
10.) & \mathbf{n}^{(10)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T & \mathbf{s}^{(10)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)^T \\
11.) & \mathbf{n}^{(11)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T & \mathbf{s}^{(11)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^T \\
12.) & \mathbf{n}^{(12)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T & \mathbf{s}^{(12)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1, 0)^T .
\end{array}$$

2.1 Grundlagen zur Beschreibung von Anisotropie

Die Betrachtung anisotroper Materialien (sowohl Ein- als auch Polykristalle) zeigt, daß zumindest keine völlig ungeordnete Struktur auftritt, sondern daß auch hierbei bestimmte Symmetrien vorhanden sind. Hier wird beschrieben, welche Transformationseigenschaften die Materialgleichungen zur Beschreibung solcher Materialien erfüllen müssen (siehe dazu Boehler [6], Kapitel 2).

Anschließend wird für die Anisotropie-Klasse der kubischen Symmetrie die Darstellung des Elastizitätsgesetzes exemplarisch vorgestellt.

Zunächst muß geklärt werden, was Anisotropie bedeutet und wie sich ein anisotropes Material verhält. Hierzu geht man von einem Körper aus, der mit einer mechanischen Belastungsgröße (z.B. dem Verzerrungstensor) beaufschlagt wird, die eine mechanische Reaktion (z.B. Spannungsgröße) hervorruft. Die Belastung wird im folgenden mit einem Tensor \mathbf{A} , die Reaktion mit einem Tensor \mathbf{S} bezeichnet.

Ist das Material isotrop, so gilt für eine gedrehte Belastung

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T \quad , \quad \mathbf{Q} \in SO(3) \quad , \quad (2.1)$$

daß sich dann auch der Reaktionstensor mit dem gleichen Rotationstensor transformiert

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{Q}\mathbf{S}\mathbf{Q}^T \quad . \quad (2.2)$$

Analog zur Änderung der Belastungstensoren kann auch die Orientierung des Körpers verändert werden, d.h. die Orientierungsachsen \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 werden rotiert:

$$\mathbf{v}_1^* = \mathbf{Q}\mathbf{v}_1 \quad , \quad \mathbf{v}_2^* = \mathbf{Q}\mathbf{v}_2 \quad , \quad \mathbf{Q} \in SO(3) \quad . \quad (2.3)$$

In diesem Fall bleiben die Hauptachsen der Ellipsen, die die Materialantwort \mathbf{S} bzw. \mathbf{S}^* bezeichnen, unabhängig von der Orientierung des Körpers immer gleich, sie sind invariant gegenüber beliebigen Rotationen des Körpers.

Ein anderes Verhalten wird bei anisotropen Körpern beobachtet. Auch in diesem Fall werden zwei Belastungsgrößen \mathbf{A} und \mathbf{A}^* vorgegeben, die sich durch eine Rotation \mathbf{Q} unterscheiden. Die Orientierung des Materials ist in beiden Fällen gleich. In diesem Fall stellen sich jedoch nicht zwei Materialantworten $(\mathbf{S}, \mathbf{S}^*)$ ein, die dieselben Hauptachsen wie die Belastung haben, sondern im allgemeinen unterscheiden sie sich. Folglich gehen auch die Materialantworten nicht mehr aus denselben Transformationen hervor, wie die Belastung

$$\mathbf{S}^* \neq \mathbf{Q}\mathbf{S}\mathbf{Q}^T . \quad (2.4)$$

Wird für diesen anisotropen Körper seine Orientierung geändert, die Belastungsgröße bleibt aber gleich, so ändern sich die Hauptachsen der Materialantwort. In diesem Fall ist die Reaktion des Materials auf die Belastung nicht mehr invariant gegenüber beliebigen Rotationen des Körpers und die Materialantwort weist Abhängigkeiten von der Orientierung auf.

Allerdings besitzt auch ein anisotroper Körper bestimmte Symmetrien, d.h. es gibt Transformationen, bezüglich denen sich die Reaktion des Materials als invariant erweist. Diese orthogonalen Transformationen werden als die *materielle Symmetriegruppe* oder *Isotropiegruppe* $\mathcal{G} \subset SO(3)$ bezeichnet. Es gilt die Transformationseigenschaft

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T \Rightarrow \mathbf{S}^* = \mathbf{Q}\mathbf{S}\mathbf{Q}^T \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathcal{G} . \quad (2.5)$$

Verschiedene Anisotropie-Klassen lassen sich somit über ihre Isotropiegruppen charakterisieren. Für Isotropie besteht die Isotropiegruppe aus der Gruppe der orthogonalen Tensoren ohne Spiegelung $\mathcal{G} = SO(3)$, während für den allgemeinsten anisotropen Fall die Isotropiegruppe nur aus der identischen Abbildung $\mathcal{G} = \{\mathbf{1}\}$ besteht.

2.2 Herleitung des Elastizitätsgesetzes für kubische Symmetrie

Hierzu wird das Elastizitätsgesetz

$$\mathbf{S} = \mathbb{E}\mathbf{A} \quad (2.6)$$

mit Hilfe der *Voigt-Notation* für den Spannungs- und den Dehnungstensor

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= (S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{12}, S_{13}, S_{23})^T \\ \mathcal{A} &= (A_{11}, A_{22}, A_{33}, 2A_{12}, 2A_{13}, 2A_{23})^T \end{aligned} \quad (2.7)$$

in die Form

$$\mathcal{S} = \mathbb{C}\mathcal{A} \quad (2.8)$$

umgeschrieben.

Für anisotrope Materialien mit kubischer Symmetrie hat der Elastizitätstensor \mathbb{C} im Hauptachsensystem des Kristalls die Form

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} C_1^e & C_2^e & C_2^e & 0 & 0 & 0 \\ C_2^e & C_1^e & C_2^e & 0 & 0 & 0 \\ C_2^e & C_2^e & C_1^e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_3^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_3^e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_3^e \end{pmatrix} . \quad (2.9)$$

Dabei sind C_1^e, C_2^e, C_3^e Materialkonstanten.

Der Spannungstensor \mathbf{S} für kubische Kristallsymmetrie kann dann als

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} C_1^e A_{11} + C_2^e A_{22} + C_3^e A_{33} & C_3^e A_{12} & C_3^e A_{13} \\ C_3^e A_{21} & C_2^e A_{11} + C_1^e A_{22} + C_2^e A_{33} & C_3^e A_{23} \\ C_3^e A_{31} & C_3^e A_{32} & C_2^e A_{11} + C_2^e A_{22} + C_1^e A_{33} \end{bmatrix}$$

geschrieben werden.

Man definiere im Hauptachsensystem des kubischen Kristalls die Tensoren

$$\widetilde{\mathbf{M}}_{ij} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad i, j = 1..3 \quad .$$

Im gedrehten System lauten die Tensoren \mathbf{M}_{ij} :

$$\boxed{\mathbf{M}_{ij} = (\mathbf{O}\mathbf{e}_i) \otimes (\mathbf{O}\mathbf{e}_j) \quad \text{mit} \quad \mathbf{O}^{-1} = \mathbf{O}^T, \quad i, j = 1..3} \quad . \quad (2.10)$$

Nun läßt sich der Spannungstensor für kubische Symmetrie als

$$\boxed{\mathbf{S} = \frac{1}{2}C_1^e \mathbf{I}_1 + C_2^e \mathbf{I}_2 + C_3^e \mathbf{I}_3} \quad (2.11)$$

schreiben.

Die Größen $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3$ sind als

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= 2((\mathbf{A} \cdot \mathbf{M}_{11}) \mathbf{M}_{11} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{M}_{22}) \mathbf{M}_{22} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{M}_{33}) \mathbf{M}_{33}) \\ \mathbf{I}_2 &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{M}_{22} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{M}_{33}) \mathbf{M}_{11} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{M}_{11} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{M}_{33}) \mathbf{M}_{22} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{M}_{22} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{M}_{11}) \mathbf{M}_{33} \\ \mathbf{I}_3 &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{M}_{12}) \mathbf{M}_{12} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{M}_{23}) \mathbf{M}_{23} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{M}_{31}) \mathbf{M}_{31} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{M}_{21}) \mathbf{M}_{21} \\ &\quad + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{M}_{32}) \mathbf{M}_{32} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{M}_{13}) \mathbf{M}_{13} \end{aligned}$$

gegeben.

Kapitel 3

Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Zunächst werden die grundlegenden Begriffe, die bei der Entwicklung von Materialmodellen benötigt werden, vorgestellt. Dann folgt eine kurze Einführung in die Kinematik mit der Zerlegung der Deformation. Um Materialgleichungen für große Deformationen zu erhalten, wird das Konzept der *dualen Variablen* (siehe hierzu Haupt und Tsakmakis [22], [23] und Svendsen und Tsakmakis [34]) vorgestellt.

3.1 Kinematik

Ausgangspunkt ist ein materieller Körper \mathcal{B} abgebildet im euklidischen Punktraum E . Jedem materiellen Punkt X des Körpers kann nach der Festlegung eines Ursprungs O in E und eines raumfesten kartesischen Koordinatensystems mit dem Nullpunkt O ein Ortsvektor \mathbf{X} zugeordnet werden.

Mit \mathcal{R}_R wird der Raumbereich bezeichnet, den der materielle Körper in einer zeitlich konstanten *Bezugskonfiguration* einnimmt.

Zum Zeitpunkt t nimmt der materielle Körper den von der Zeit abhängigen Raumbereich \mathcal{R}_t , die *Momentankonfiguration*, ein.

Der Ortsvektor, der dem materiellen Punkt X in der Momentankonfiguration zugeordnet wird, wird mit \mathbf{x} bezeichnet. Er wird durch die Bewegungsgleichung

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \quad (3.1)$$

beschrieben. Für einen festen Zeitpunkt t existiert hierbei die Inverse der Bewegungsgleichung

$$\mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t) \quad . \quad (3.2)$$

Damit läßt sich zu jedem beliebigen, aber festen Zeitpunkt t ein *Deformationsgradient*

$$\mathbf{F} := \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \quad (3.3)$$

definieren, der die Deformation in der Umgebung des materiellen Punktes X beschreibt. Er stellt eine Abbildungsvorschrift dar, die ein materielles Linienelement in der Bezugskonfiguration $d\mathbf{X}$ auf ein materielles Linienelement in der Momentankonfiguration $d\mathbf{x}$ abbildet

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \quad . \quad (3.4)$$

Da eine positive Determinante des Deformationsgradienten $\det \mathbf{F} > 0$ angenommen wird, existiert eine eindeutige polare Zerlegung des Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad , \quad (3.5)$$

mit dem orthogonalen Rotationstensor \mathbf{R} , $\det \mathbf{R} = 1$ und dem symmetrischen, positiv definiten rechten bzw. linken Strecktensor \mathbf{U}, \mathbf{V} .

Durch die materielle Zeitableitung des Deformationsgradienten

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{X}} \right) = \mathbf{L}\mathbf{F} \quad , \quad \mathbf{L} := \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.6)$$

ist der *räumliche Geschwindigkeitsgradient* \mathbf{L} definiert, der additiv

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (3.7)$$

in seinen symmetrischen Anteil \mathbf{D} , den *Verzerrungsgeschwindigkeitstensor* und in seinen antisymmetrischen Anteil \mathbf{W} , den *Wirbeltensor*, zerlegt werden kann.

3.2 Zerlegung der Deformation

Ausgangspunkt für die Formulierung der Materialgleichungen ist die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p \quad (3.8)$$

in einen reversiblen, *elastischen* Anteil \mathbf{F}_e und einen irreversiblen, *inelastischen (plastischen)* Anteil \mathbf{F}_p .

Dadurch wird eine weitere Konfiguration, die *Zwischenkonfiguration* $\hat{\mathcal{R}}_t$, festgelegt. Diese Zwischenkonfiguration wird durch eine fiktive, im allgemeinen nicht kompatible Entlastung erhalten und ist spannungsfrei.

Ein materielles Linienelement der Zwischenkonfiguration $d\hat{\mathbf{x}}$ kann durch die Abbildungen

$$d\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_p d\mathbf{X} = \mathbf{F}_e^{-1} d\mathbf{x} \quad (3.9)$$

aus den Linienelementen der Referenz- bzw. Momentankonfiguration bestimmt werden. Es wird angenommen, daß $\det \mathbf{F}_e > 0$ (und somit auch $\det \mathbf{F}_p > 0$) gilt. Analog zu der polaren Zerlegung des Deformationsgradienten (3.5) existieren dann auch für die elastischen und inelastischen Anteile des Deformationsgradienten polare Zerlegungen der Form

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{R}_e \mathbf{U}_e = \mathbf{V}_e \mathbf{R}_e \quad . \quad (3.10)$$

$$\mathbf{F}_p = \mathbf{R}_p \mathbf{U}_p = \mathbf{V}_p \mathbf{R}_p \quad . \quad (3.11)$$

Ebenso gibt es einen elastischen und inelastischen Geschwindigkeitsgradienten, die beide additiv in ihre symmetrischen und antisymmetrischen Anteile

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_e &= \dot{\mathbf{F}}_e \mathbf{F}_e^{-1} = \mathbf{D}_e + \mathbf{W}_e \quad , \\ \hat{\mathbf{L}}_p &= \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1} = \hat{\mathbf{D}}_p + \hat{\mathbf{W}}_p \end{aligned} \quad (3.12)$$

zerlegt werden können.

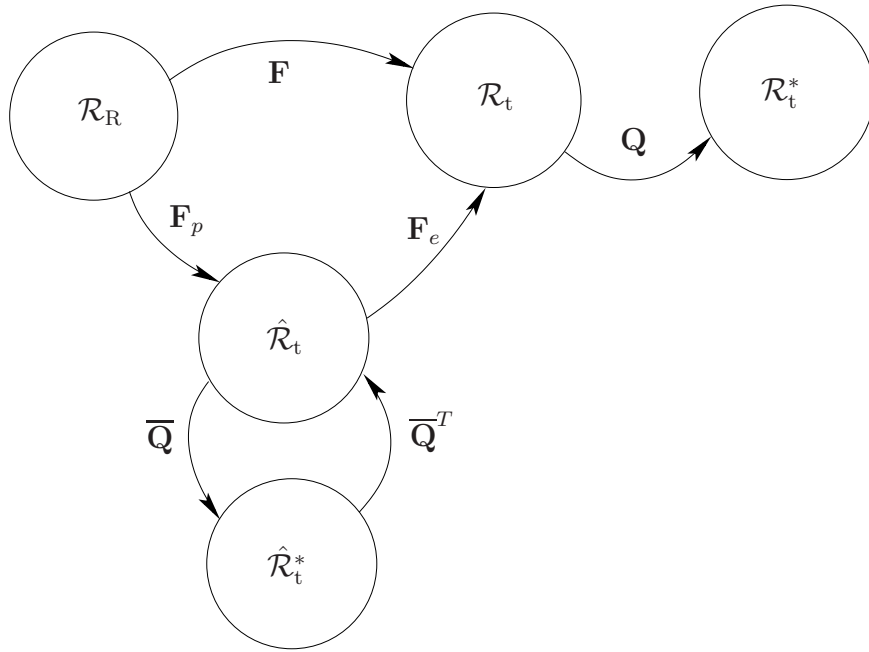


Abbildung 3.1: Zerlegung der Deformation

3.3 Konzept der dualen Variablen

Es existieren verschiedene Möglichkeiten, Verzerrungstensoren zu definieren und diesen in sinnvoller Weise Spannungstensoren zuzuordnen. Eine Möglichkeit ist es, auf Grundlage der materiellen Linienelemente ein *skalares Verzerrungsmaß*

$$\Delta = \frac{1}{2}(d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}) = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} d\mathbf{X} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} d\mathbf{x} = d\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{\Gamma}} d\hat{\mathbf{x}} \quad (3.13)$$

zu definieren. Dieses Verzerrungsmaß ist forminvariant bezüglich der gewählten Konfiguration. Alle Größen, die aus diesem Verzerrungsmaß Δ abgeleitet sind, werden der *Familie 1* zugeordnet. Größen der *Familie 2* werden aus einem anderen Verzerrungsmaß, das auf den Normalen an materiellen Flächen basiert, hergeleitet. Diese werden in dieser Arbeit aber nicht weiter benötigt.

Das Verzerrungsmaß Δ kann in einen elastischen und inelastischen Anteil

$$\Delta = \frac{1}{2}(d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\hat{\mathbf{x}} \cdot d\hat{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2}(d\hat{\mathbf{x}} \cdot d\hat{\mathbf{x}} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}) = \Delta_e + \Delta_p \quad (3.14)$$

zerlegt werden.

Den verschiedenen Konfigurationen sind nun verschiedene Verzerrungstensoren zugeordnet. Als Verzerrungstensoren ergeben sich:

- der *Green'sche Verzerrungstensor* in der Referenzkonfiguration \mathcal{R}_R

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_p \quad (3.15)$$

mit

$$\mathbf{E}_e = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{F}_p^T \mathbf{F}_p) \quad , \quad \mathbf{E}_p = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_p^T \mathbf{F}_p - \mathbf{1}) \quad , \quad (3.16)$$

- der Verzerrungstensor der Zwischenkonfiguration $\hat{\mathcal{R}}_t$

$$\hat{\mathbf{F}} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_e^T \mathbf{F}_e - \mathbf{F}_p^{T-1} \mathbf{F}_p^{-1}) = \hat{\mathbf{F}}_e + \hat{\mathbf{F}}_p \quad (3.17)$$

mit

$$\hat{\mathbf{F}}_e = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_e^T \mathbf{F}_e - \mathbf{1}) \quad , \quad \hat{\mathbf{F}}_p = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}_p^{T-1} \mathbf{F}_p^{-1}) \quad , \quad (3.18)$$

- sowie der *Almansi'sche Verzerrungstensor* in der Momentankonfiguration \mathcal{R}_t

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}^{T-1} \mathbf{F}^{-1}) = \mathbf{A}_e + \mathbf{A}_p \quad (3.19)$$

mit

$$\mathbf{A}_e = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}_e^{T-1} \mathbf{F}_e^{-1}) \quad , \quad \mathbf{A}_p = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_e^{T-1} \mathbf{F}_e^{-1} - \mathbf{F}^{T-1} \mathbf{F}^{-1}) \quad . \quad (3.20)$$

Die objektiven Geschwindigkeiten der Verzerrungstensoren der 1. Familie sind durch die Forminvarianz der zeitlichen Ableitungen des Verzerrungsmaßes Δ (3.13) (siehe Haupt und Tsakmakis[22], [23] und Tsakmakis[38])

$$\dot{\Delta} = d\mathbf{X} \cdot \dot{\mathbf{E}} d\mathbf{X} = d\mathbf{x} \cdot \overset{\Delta}{\mathbf{A}} d\mathbf{x} = d\hat{\mathbf{x}} \cdot \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{F}}} d\hat{\mathbf{x}} \quad (3.21)$$

gegeben, wobei die *unteren Oldroyd-Ableitungen* bezüglich der Momentan- bzw. Zwischenkonfiguration mit

$$\overset{\Delta}{(\cdot)} = \dot{(\cdot)} + \mathbf{L}^T(\cdot) + (\cdot)\mathbf{L} \quad \text{in} \quad \mathcal{R}_t \quad , \quad \overset{\Delta}{(\cdot)} = \dot{(\cdot)} + \hat{\mathbf{L}}_p^T(\cdot) + (\cdot)\hat{\mathbf{L}}_p \quad \text{in} \quad \hat{\mathcal{R}}_t \quad (3.22)$$

definiert sind.

Auch die Geschwindigkeiten der Verzerrungstensoren lassen sich additiv in elastische und inelastische Anteile

$$\overset{\Delta}{\mathbf{A}} = \overset{\Delta}{\mathbf{A}}_e + \overset{\Delta}{\mathbf{A}}_p \quad , \quad \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{F}}} = \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{F}}}_e + \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{F}}}_p \quad (3.23)$$

zerlegen.

Weiterhin existieren die folgenden Beziehungen zwischen den objektiven Geschwindigkeiten der Verzerrungstensoren und den Verzerrungsgeschwindigkeitstensoren:

$$\overset{\Delta}{\mathbf{A}} = \mathbf{D} \quad , \quad \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{F}}} = \hat{\mathbf{D}}_p \quad . \quad (3.24)$$

Aus der Invarianz der *spezifischen Spannungsleistung* in der Referenzkonfiguration

$$W = \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} = \hat{\mathbf{T}} \cdot \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{F}}} \quad (3.25)$$

folgen die den jeweiligen Verzerrungstensoren zugeordneten Spannungstensoren.

Es handelt sich hierbei:

- um den 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor $\tilde{\mathbf{T}}$ in der Bezugskonfiguration,

- um den *Cauchy'schen* Spannungstensor \mathbf{T} und den *gewichteten Cauchy'schen* Spannungstensor $\mathbf{S} = \det \mathbf{F} \mathbf{T}$ in der Momentankonfiguration,
- sowie um den 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor der Zwischenkonfiguration $\hat{\mathbf{T}}$.

Schließlich werden aus der Forminvarianz der zeitlichen Ableitungen der Spannungseistung die objektiven Spannungsgeschwindigkeiten bestimmt.

Dies sind die materiellen Zeitableitungen für Größen der Bezugskonfiguration und die *oberen Oldroyd-Ableitungen* für Größen in der Momentan- bzw. Zwischenkonfiguration

$$\overset{\nabla}{()} = \dot{()} - \mathbf{L}() - ()\mathbf{L}^T \quad \text{in } \mathcal{R}_t, \quad \overset{\nabla}{()} = \dot{()} - \hat{\mathbf{L}}_p() - ()\hat{\mathbf{L}}_p^T \quad \text{in } \hat{\mathcal{R}}_t. \quad (3.26)$$

3.4 Transformationsbeziehungen

Die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten in einen elastischen und plastischen Anteil (3.8) ist *nicht eindeutig*, sondern die Zwischenkonfiguration ist nur bis auf eine Starrkörperrotation $\bar{\mathbf{Q}}$ (siehe Abbildung 3.1) festgelegt. Die Zerlegung des Deformationsgradienten hat dann die Form

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \bar{\mathbf{Q}}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{F}_p, \quad \bar{\mathbf{Q}}^{-1} = \bar{\mathbf{Q}}^T, \quad \det \bar{\mathbf{Q}} = 1. \quad (3.27)$$

Dies begründet gewisse Invarianzforderungen, die die Feldgleichungen erfüllen müssen (siehe hierzu Green und Naghdi[17]).

Als weitere Einschränkung für die Materialgleichungen wird verlangt, daß sie das *Prinzip der materiellen Objektivität* im Zusammenhang mit beliebigen Starrkörperbewegungen, die der Momentankonfiguration überlagert sind, erfüllen. Die überlagerten Starrkörperbewegungen werden beschrieben durch

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T, \quad \det \mathbf{Q} = 1. \quad (3.28)$$

Für die neue Deformation gilt

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{F}_e^* \mathbf{F}_p^* \quad (3.29)$$

$$\mathbf{F}_e^* = \mathbf{Q} \mathbf{F}_e \bar{\mathbf{Q}}^T \quad (3.30)$$

$$\mathbf{F}_p^* = \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{F}_p. \quad (3.31)$$

Durch Einsetzen des neuen Deformationsgradienten \mathbf{F}^* in die Definitionen der Verzerungstensoren (3.19) und (3.17) sowie in die objektiven Geschwindigkeiten der Verzerungstensoren läßt sich feststellen, daß Größen der Momentan- und Zwischenkonfiguration jeweils das Transformationsverhalten

$$()^* = \mathbf{Q}() \mathbf{Q}^T \quad \text{in } \mathcal{R}_t \quad (3.32)$$

$$(\hat{ })^* = \bar{\mathbf{Q}}(\hat{ }) \bar{\mathbf{Q}}^T \quad \text{in } \hat{\mathcal{R}}_t \quad (3.33)$$

besitzen. Dies ist für die Tensoren \mathbf{L} und $\hat{\mathbf{L}}_p$ jedoch nicht der Fall. Da im weiteren Verlauf der Arbeit hauptsächlich der plastische Geschwindigkeitsgradient $\hat{\mathbf{L}}_p$ benötigt wird, wird die Verletzung der Eigenschaft (3.33) an dieser Größe gezeigt. In die Definition für $\hat{\mathbf{L}}_p$ (3.12) werden die rotierten Deformationsgradienten \mathbf{F}_p^* (3.31) eingesetzt

$$\hat{\mathbf{L}}_p^* = \dot{\mathbf{F}}_p^* \mathbf{F}_p^{*-1} = \bar{\mathbf{Q}} \dot{\mathbf{Q}}^T + \bar{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{L}}_p \bar{\mathbf{Q}}^T. \quad (3.34)$$

Es ist zu erkennen, daß der plastische Geschwindigkeitsgradient $\hat{\mathbf{L}}_p$ wegen dem antisymmetrischen Tensor $\dot{\overline{\mathbf{Q}}} \overline{\mathbf{Q}}^T$ die Eigenschaft (3.33) nicht besitzt. Folglich erfüllt zwar der symmetrische Anteil, die plastische Verzerrungsgeschwindigkeit $\hat{\mathbf{D}}_p$, die Eigenschaft (3.33)

$$\hat{\mathbf{D}}_p^* = \overline{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{D}}_p \overline{\mathbf{Q}}^T \quad ,$$

nicht jedoch sein antisymmetrischer Anteil, der plastische Wirbeltensor $\hat{\mathbf{W}}_p$

$$\hat{\mathbf{W}}_p^* = \dot{\overline{\mathbf{Q}}} \overline{\mathbf{Q}}^T + \overline{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{W}}_p \overline{\mathbf{Q}}^T \quad .$$

Kapitel 4

Modellierung des Einkristalls

4.1 Zerlegung der Deformation

Der Deformationsgradient \mathbf{F} wird multiplikativ in einen elastischen Anteil \mathbf{F}_e und einen plastischen Anteil \mathbf{F}_p zerlegt:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p \quad (4.1)$$

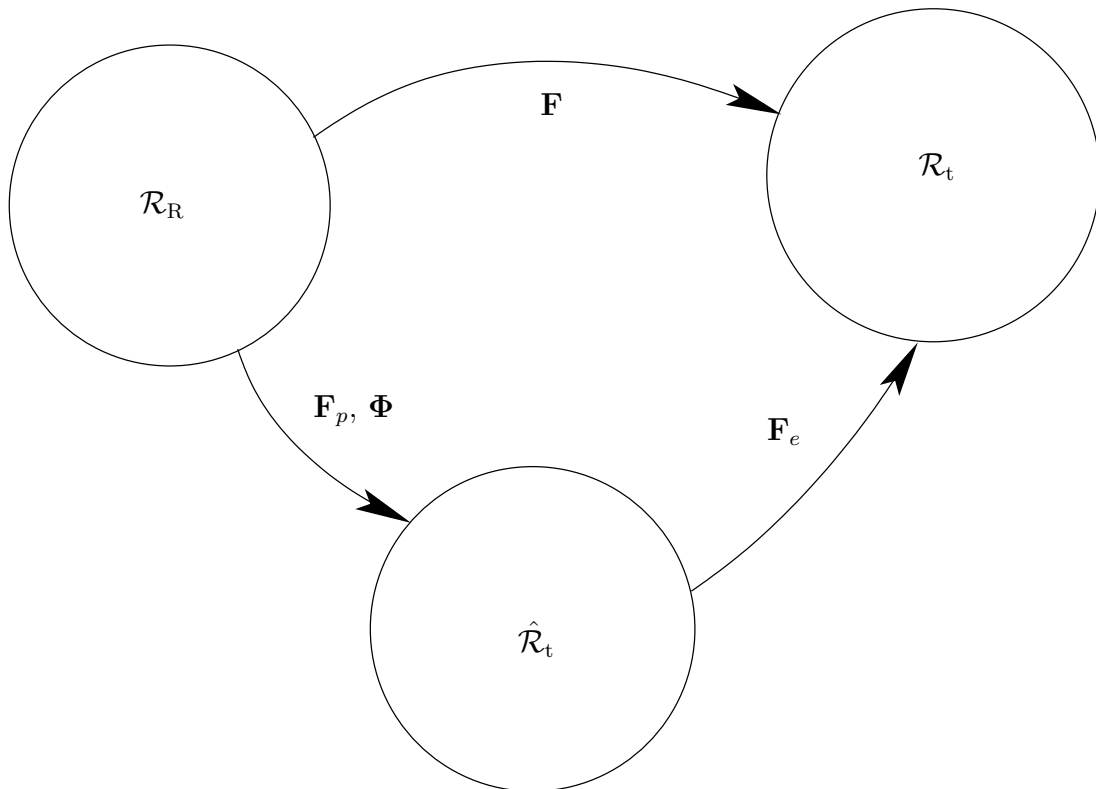


Abbildung 4.1: Zerlegung der Deformation

Die Zerlegung der Deformation ist bezüglich Drehungen $\bar{\mathbf{Q}}$ der Zwischenkonfiguration nicht eindeutig:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \bar{\mathbf{Q}}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{F}_p \quad (4.2)$$

Die Drehung der Zwischenkonfiguration wird nun mit einem Tensor Φ^T zurückgenommen und ein zurückgedrehtes $\tilde{\mathbf{F}}_p$ definiert:

$$\mathbf{F} = \underbrace{\mathbf{F}_e}_{=:\tilde{\mathbf{F}}_e} \underbrace{\Phi \Phi^T \mathbf{F}_p}_{=:\tilde{\mathbf{F}}_p} \quad (4.3)$$

Also

$$\boxed{\tilde{\mathbf{F}}_p = \Phi^T \mathbf{F}_p, \quad \text{oder auch} \quad \mathbf{F}_p = \Phi \tilde{\mathbf{F}}_p} \quad (4.4)$$

Damit stellt $\tilde{\mathbf{F}}_p$ eine *reine Scherung* in \mathcal{R}_R dar.

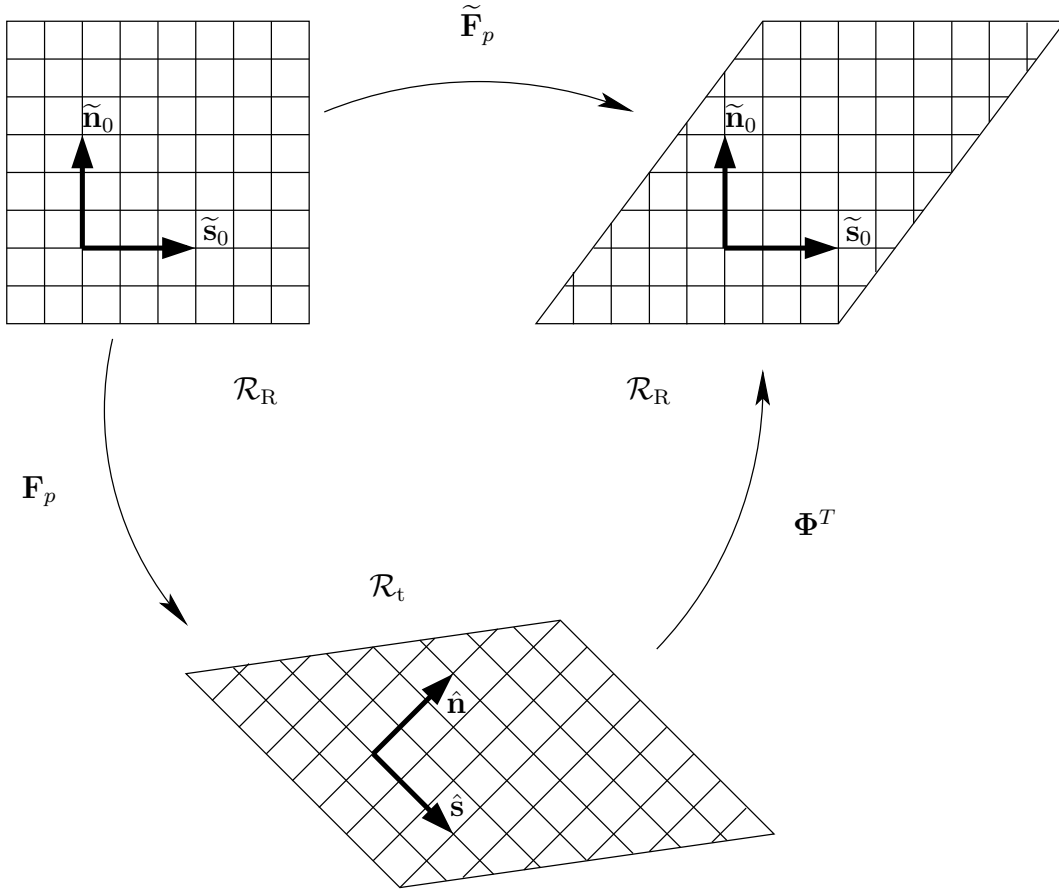


Abbildung 4.2: Reine Scherung nach Zurückdrehung der Zwischenkonfiguration

4.2 Darstellung des plastischen Geschwindigkeitsgradienten

Sei mit $\tilde{\mathbf{s}}^{(i)}$, $\tilde{\mathbf{n}}^{(i)}$ das i -te Gleitsystem in \mathcal{R}_R bezeichnet, dann schlägt Asaro [4] für die Darstellung des plastischen Anteils des Deformationsgradienten im i -ten Gleitsystem

$$\boxed{\tilde{\mathbf{F}}_p^{(i)} = \gamma_p^{(i)} \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} + \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} + \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} + \tilde{\mathbf{v}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{v}}^{(i)}} \quad (4.5)$$

(reine Scherung) vor. Hierbei bilden die 3 Vektoren $\tilde{\mathbf{s}}^{(i)}$, $\tilde{\mathbf{n}}^{(i)}$ und $\tilde{\mathbf{v}}^{(i)}$ ein orthonormales Basissystem.

Folgerungen:

Der plastische Geschwindigkeitsgradient im i-ten Gleitsystem lautet dann

$$\boxed{\tilde{\mathbf{L}}_p^{(i)} = \dot{\tilde{\mathbf{F}}}_p^{(i)} (\tilde{\mathbf{F}}_p^{(i)})^{-1} = \dot{\gamma}_p^{(i)} \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{n}}^{(i)}} \quad . \quad (4.6)$$

Der makroskopische plastische Geschwindigkeitsgradient in \mathcal{R}_R wird, gemittelt über alle Gleitsysteme, als

$$\boxed{\tilde{\mathbf{L}}_p := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{L}}_p^{(i)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_p^{(i)} \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{n}}^{(i)}} \quad (4.7)$$

definiert (analog zur baryzentrischen Geschwindigkeit in der Mischungstheorie).

4.2.1 Transformation der $\tilde{\mathbf{L}}_p^{(i)}$ auf die Zwischenkonfiguration

Annahme: Die $\tilde{\mathbf{F}}_p^{(i)}$ transformieren sich wie

$$\tilde{\mathbf{F}}_p^{(i)} = \Phi^T \mathbf{F}_p^{(i)}, \quad \text{oder auch} \quad \mathbf{F}_p^{(i)} = \Phi \tilde{\mathbf{F}}_p^{(i)} \quad . \quad (4.8)$$

Damit transformiert sich $\tilde{\mathbf{L}}_p^{(i)}$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{L}}_p^{(i)} &:= \dot{\mathbf{F}}_p^{(i)} (\mathbf{F}_p^{(i)})^{-1} = (\Phi \tilde{\mathbf{F}}_p^{(i)}) \dot{(\tilde{\mathbf{F}}_p^{(i)})^{-1}} \Phi^T \\ &= (\dot{\Phi} \tilde{\mathbf{F}}_p^{(i)} + \Phi \dot{\tilde{\mathbf{F}}}_p^{(i)}) (\tilde{\mathbf{F}}_p^{(i)})^{-1} \Phi^T = \dot{\Phi} \Phi^T + \Phi \dot{\tilde{\mathbf{F}}}_p^{(i)} (\tilde{\mathbf{F}}_p^{(i)})^{-1} \Phi^T \\ &= \dot{\Phi} \Phi^T + \Phi \tilde{\mathbf{L}}_p^{(i)} \Phi^T \quad . \end{aligned} \quad (4.9)$$

Also

$$\boxed{(\hat{\mathbf{L}}_p^{(i)} - \dot{\Phi} \Phi^T) = \Phi \tilde{\mathbf{L}}_p^{(i)} \Phi^T = \dot{\gamma}_p^{(i)} \hat{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)}} \quad (4.10)$$

wobei

$$\hat{\mathbf{s}}^{(i)} = \Phi \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{n}}^{(i)} = \Phi \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \quad (4.11)$$

sind.

Hier sind $\hat{\mathbf{s}}^{(i)}$ und $\hat{\mathbf{n}}^{(i)}$ die Basisvektoren des i-ten Gleitsystems in der Zwischenkonfiguration.

4.2.2 Transformation von $\tilde{\mathbf{L}}_p$ auf die Zwischenkonfiguration

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{L}}_p &:= \dot{\mathbf{F}}_p (\mathbf{F}_p)^{-1} = (\Phi \tilde{\mathbf{F}}_p) \dot{(\tilde{\mathbf{F}}_p)^{-1}} \Phi^T \\ &= (\dot{\Phi} \tilde{\mathbf{F}}_p + \Phi \dot{\tilde{\mathbf{F}}}_p) (\tilde{\mathbf{F}}_p)^{-1} \Phi^T = \dot{\Phi} \Phi^T + \Phi \dot{\tilde{\mathbf{F}}}_p (\tilde{\mathbf{F}}_p)^{-1} \Phi^T \\ &= \dot{\Phi} \Phi^T + \Phi \tilde{\mathbf{L}}_p \Phi^T \end{aligned} \quad (4.12)$$

Daraus folgt mit der Beziehung (4.7)

$$\tilde{\mathbf{L}}_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{L}}_p^{(i)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_p^{(i)} \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \quad (4.13)$$

und mit (4.11) die Darstellung des plastischen Geschwindigkeitsgradienten in der Zwischenkonfiguration

$$\boxed{\hat{\mathbf{L}}_p - \dot{\Phi} \Phi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_p^{(i)} \hat{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{\mathbf{L}}_p^{(i)} - \dot{\Phi} \Phi^T)} \quad (4.14)$$

4.3 Thermodynamik

Voraussetzung: Isotherme Prozeßführung und einheitliche Temperaturverteilung.

Damit ergibt sich die **Clausius-Duhem-Ungleichung** zu:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{D} - \rho_R \dot{\psi} \geq 0 \quad (4.15)$$

Die Clausius-Duhem-Ungleichung besagt, daß die Spannungsleistung $\mathbf{S} \cdot \mathbf{D}$ größer oder gleich als die im Material gespeicherte Ableitung der inneren Energie $\rho_R \dot{\psi}$ ist.

Dies kann auf Größen der Zwischenkonfiguration zu

$$\boxed{\hat{\mathbf{T}} \cdot \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{F}}} - \rho_R \dot{\psi} \geq 0} \quad (4.16)$$

umgeschrieben werden.

Hier bei ist $\hat{\mathbf{T}} \cdot \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{F}}}$ der Spannungsleistung in der Zwischenkonfiguration.

Annahme: Die Freie Energiefunktion ψ läßt sich additiv in einen elastischen Anteil ψ_e und in einen plastischen Anteil ψ_p aufspalten:

$$\psi(t) = \psi_e(t) + \psi_p(t) \quad (4.17)$$

4.3.1 Herleitung des Elastizitätsgesetzes

Annahme:

Der elastische Anteil der Freien Energiefunktion soll von einem orthogonalen Tensor Φ und dem elastischen Anteil des Deformationsgradienten abhängen

$$\psi_e = \bar{\psi}_e(\Phi, \mathbf{F}_e) \quad (4.18)$$

Diese Form wird nun durch die Objektivitätsforderung eingeschränkt.

Unter Drehungen der Zwischenkonfiguration $\hat{\mathbf{Q}}$ und Drehungen der Momentankonfiguration \mathbf{Q} transformieren sich Φ und \mathbf{F}_e wie

$$\Phi \rightarrow \Phi^* = \hat{\mathbf{Q}}\Phi, \quad \mathbf{F}_e \rightarrow \mathbf{F}_e^* = \mathbf{Q}\mathbf{F}_e\hat{\mathbf{Q}}^T. \quad (4.19)$$

ψ_e ist eine skalare Invariante, die unter Drehungen in der Zwischen- und Momentankonfiguration als Wert unverändert bleibt

$$\psi_e = \bar{\psi}_e(\Phi, \mathbf{F}_e) = \bar{\psi}_e(\hat{\mathbf{Q}}\Phi, \mathbf{Q}\mathbf{F}_e\hat{\mathbf{Q}}^T). \quad (4.20)$$

Setze nun speziell $\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{1}$ und die polare Zerlegung $\mathbf{F}_e = \mathbf{R}_e\hat{\mathbf{U}}_e$ ein

$$\psi_e = \bar{\psi}_e(\Phi, \mathbf{Q}\mathbf{R}_e\hat{\mathbf{U}}_e). \quad (4.21)$$

Mit $\mathbf{Q} = \mathbf{R}_e^{-1}$ und dem Verzerrungsmaß $\hat{\Gamma}_e = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{U}}_e^2 - \mathbf{1})$ vereinfacht sich ψ_e zu

$$\boxed{\psi_e = \bar{\psi}_e(\Phi, \hat{\Gamma}_e)} \quad (4.22)$$

Unter Drehungen der Zwischenkonfiguration $\hat{\mathbf{Q}}$ transformiert sich das Verzerrungsmaß $\hat{\Gamma}_e$ wie

$$\hat{\Gamma}_e \rightarrow \hat{\Gamma}_e^* = \hat{\mathbf{Q}}\hat{\Gamma}_e\hat{\mathbf{Q}}^T. \quad (4.23)$$

Mit speziell $\hat{\mathbf{Q}} = \Phi^T$ folgt

$$\boxed{\psi_e = \bar{\psi}_e(\mathbf{1}, \underbrace{\Phi^T \hat{\Gamma}_e \Phi}_{=: \tilde{\Gamma}_e}) =: \tilde{\psi}_e(\tilde{\Gamma}_e)} \quad (4.24)$$

Damit hängt der elastische Anteil der Freien Energiefunktion ψ_e nur von dem Verzerrungsmaß $\tilde{\Gamma}_e$ ab.

Berechnung von $\dot{\psi}_e$

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_e &= \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\Gamma}_e} \cdot \dot{\tilde{\Gamma}}_e = \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\Gamma}_e} \cdot \Phi^T \dot{\hat{\Gamma}}_e \Phi + \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\Gamma}_e} \cdot \dot{\Phi}^T \hat{\Gamma}_e \Phi + \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\Gamma}_e} \cdot \Phi^T \hat{\Gamma}_e \dot{\Phi} \\ &= \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\Gamma}_e} \Phi^T \dot{\hat{\Gamma}}_e^T \Phi \right) + \text{tr} \left(\left(\frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\Gamma}_e} \right)^T \dot{\Phi}^T \hat{\Gamma}_e \Phi \right) + \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\Gamma}_e} \Phi^T \hat{\Gamma}_e^T \dot{\Phi} \right) \end{aligned}$$

Da die Tensoren $\frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\Gamma}_e}$ und $\hat{\Gamma}_e$ symmetrisch sind, folgt

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_e &= \Phi \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\Gamma}_e} \Phi^T \cdot \dot{\hat{\Gamma}}_e + \text{tr} \left(\hat{\Gamma}_e \Phi \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\Gamma}_e} \dot{\Phi}^T \right) + \text{tr} \left(\hat{\Gamma}_e \Phi \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\Gamma}_e} \dot{\Phi}^T \right) \\ &= \Phi \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\Gamma}_e} \Phi^T \cdot \dot{\hat{\Gamma}}_e + \text{tr} \left(2 \hat{\Gamma}_e \Phi \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\Gamma}_e} \Phi^T \Phi \dot{\Phi}^T \right). \end{aligned}$$

Mit der unteren Oldroyd Ableitung von $\hat{\Gamma}_e$

$$\dot{\hat{\Gamma}}_e = \overset{\Delta}{\hat{\Gamma}}_e - \hat{\mathbf{L}}_p^T \hat{\Gamma}_e - \hat{\Gamma}_e \hat{\mathbf{L}}_p$$

ergibt sich für $\dot{\psi}_e$:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_e &= \Phi \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\Gamma}_e} \Phi^T \cdot \overset{\Delta}{\hat{\Gamma}}_e - \Phi \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\Gamma}_e} \Phi^T \cdot \hat{\mathbf{L}}_p^T \hat{\Gamma}_e - \Phi \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\Gamma}_e} \Phi^T \cdot \hat{\Gamma}_e \hat{\mathbf{L}}_p \\ &+ 2 \hat{\Gamma}_e \Phi \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\Gamma}_e} \Phi^T \cdot \dot{\Phi} \Phi^T . \end{aligned}$$

Da

$$\overset{\Delta}{\hat{\Gamma}} = \overset{\Delta}{\hat{\Gamma}}_e + \overset{\Delta}{\hat{\Gamma}}_p = \overset{\Delta}{\hat{\Gamma}}_e + \hat{\mathbf{D}}_p$$

kann $\overset{\Delta}{\hat{\Gamma}}_e = \overset{\Delta}{\hat{\Gamma}} - \hat{\mathbf{D}}_p$ in $\dot{\psi}_e$ eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_e &= \Phi \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\Gamma}_e} \Phi^T \cdot \overset{\Delta}{\hat{\Gamma}} - 2 \hat{\Gamma}_e \Phi \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\Gamma}_e} \Phi^T \cdot \hat{\mathbf{L}}_p - \Phi \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\Gamma}_e} \Phi^T \cdot \hat{\mathbf{D}}_p \\ &+ 2 \hat{\Gamma}_e \Phi \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\Gamma}_e} \Phi^T \cdot \dot{\Phi} \Phi^T \\ &= \Phi \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\Gamma}_e} \Phi^T \cdot \overset{\Delta}{\hat{\Gamma}} - 2 \hat{\Gamma}_e \Phi \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\Gamma}_e} \Phi^T \cdot (\hat{\mathbf{D}}_p + \hat{\mathbf{W}}_p) - \Phi \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\Gamma}_e} \Phi^T \cdot \hat{\mathbf{D}}_p \\ &+ 2 \hat{\Gamma}_e \Phi \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\Gamma}_e} \Phi^T \cdot \dot{\Phi} \Phi^T . \end{aligned}$$

Endergebnis für $\dot{\psi}_e$:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\psi}_e &= \Phi \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\Gamma}_e} \Phi^T \cdot \overset{\Delta}{\hat{\Gamma}} - (1 + 2 \hat{\Gamma}_e) \Phi \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\Gamma}_e} \Phi^T \cdot \hat{\mathbf{D}}_p \\ &- 2 \hat{\Gamma}_e \Phi \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\Gamma}_e} \Phi^T \cdot (\hat{\mathbf{W}}_p - \dot{\Phi} \Phi^T) \end{aligned}} . \quad (4.25)$$

Dies wird nun in die Clausius-Duhem-Ungleichung

$$\hat{\mathbf{T}} \cdot \overset{\Delta}{\hat{\Gamma}} - \rho_R (\dot{\psi}_e + \dot{\psi}_p) \geq 0$$

eingesetzt:

$$\begin{aligned} &\left(\hat{\mathbf{T}} - \rho_R \Phi \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\Gamma}_e} \Phi^T \right) \cdot \overset{\Delta}{\hat{\Gamma}} + (1 + 2 \hat{\Gamma}_e) \left(\rho_R \Phi \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\Gamma}_e} \Phi^T \right) \cdot \hat{\mathbf{D}}_p \\ &+ 2 \hat{\Gamma}_e \left(\rho_R \Phi \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\Gamma}_e} \Phi^T \right) \cdot (\hat{\mathbf{W}}_p - \dot{\Phi} \Phi^T) - \rho_R \dot{\psi}_p \geq 0 . \end{aligned} \quad (4.26)$$

Aus Standardargumenten erhält man das Elastizitätsgesetz:

$$\hat{\mathbf{T}} = \rho_R \mathbf{\Phi} \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e} \mathbf{\Phi}^T = \rho_R \frac{\partial \bar{\psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{\Gamma}}_e} \quad (4.27)$$

und die Restungleichung

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{int} &:= (\mathbf{1} + 2\hat{\mathbf{\Gamma}}_e) \left(\rho_R \mathbf{\Phi} \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e} \mathbf{\Phi}^T \right) \cdot \hat{\mathbf{D}}_p \\ &\quad + 2\hat{\mathbf{\Gamma}}_e \left(\rho_R \mathbf{\Phi} \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e} \mathbf{\Phi}^T \right) \cdot (\hat{\mathbf{W}}_p - \dot{\mathbf{\Phi}} \mathbf{\Phi}^T) - \rho_R \dot{\psi}_p \geq 0 \quad , \\ \mathcal{D}_{int} &= (\mathbf{1} + 2\hat{\mathbf{\Gamma}}_e) \hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{D}}_p + 2\hat{\mathbf{\Gamma}}_e \hat{\mathbf{T}} \cdot (\hat{\mathbf{W}}_p - \dot{\mathbf{\Phi}} \mathbf{\Phi}^T) - \rho_R \dot{\psi}_p \geq 0 \quad . \end{aligned} \quad (4.28)$$

Die Restungleichung kann mit dem Mandelschen Spannungstensor $\hat{\mathbf{P}} = (\mathbf{1} + 2\hat{\mathbf{\Gamma}}_e)\hat{\mathbf{T}}$ zu

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{int} &= \hat{\mathbf{P}}_S \cdot \hat{\mathbf{D}}_p + \hat{\mathbf{P}}_A \cdot (\hat{\mathbf{W}}_p - \dot{\mathbf{\Phi}} \mathbf{\Phi}^T) - \rho_R \dot{\psi}_p \\ &= \hat{\mathbf{P}} \cdot (\hat{\mathbf{L}}_p - \dot{\mathbf{\Phi}} \mathbf{\Phi}^T) - \rho_R \dot{\psi}_p \geq 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

umgeschrieben werden.

Herbei bedeuten $\hat{\mathbf{P}}_S$ den symmetrischen und $\hat{\mathbf{P}}_A$ den antisymmetrischen Anteil des Mandelschen Spannungstensors $\hat{\mathbf{P}}$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}_S &= (\mathbf{1} + 2\hat{\mathbf{\Gamma}}_e) \hat{\mathbf{T}} \\ \hat{\mathbf{P}}_A &= 2\hat{\mathbf{\Gamma}}_e \hat{\mathbf{T}} \quad . \end{aligned}$$

4.4 Gedanken zur Beschreibung der kinematischen und isotropen Verfestigung

4.4.1 Einführung des Versetzungsbegriffs

Versucht man, die gemessenen Fließspannungen eines metallischen Werkstoffs mikrophysikalisch zu deuten, so stellt man fest, daß die dafür notwendigen Spannungen um Größenordnungen über den experimentell ermittelten liegen (siehe Vollertsen und Vogler [41]). Daher kommt ein starres Abgleiten der Gleitebenen gegeneinander als Mechanismus nicht in Frage. Vielmehr geschieht das notwendige Auftrennen bestehender und Eingehen neuer atomarer Bindungen nur sehr lokal an eindimensionalen Gitterfehlern, die sich dabei im Material "konservativ", d.h. ohne Materialtransport, fortbewegen. Diese Gitterfehler bezeichnet man als *Versetzungen*. Abbildung 4.3 zeigt die Bewegung einer Versetzung durch einen kubisch primitiven Kristall. Zusätzlich sind die drei für ein Versetzungsstück charakteristischen Vektoren $d\alpha$, \mathbf{b} und \mathbf{v} eingezeichnet. Zu ihrer Bestimmung gibt man zunächst den positiven Umlaufsinn der Versetzungsordinate α vor. Aus dem zugehörigen Tangentenvektor $d\alpha$ läßt sich dann mit Hilfe eines "Burgers-Umlauf" der Burgers-Vektor \mathbf{b} eindeutig zuordnen. Dieser ist für die gesamte Versetzung konstant und gibt Betrag und Richtung (nicht Richtungssinn) der bei der Versetzungsbewegung entstehenden Abgleitung an. Er verbindet im Fall einer vollständigen Versetzung ein Atom mit seinem nächsten Nachbarn, d.h. er liegt parallel zur Gleitrichtung. Die Versetzungslinie, die den abgeglittenen vom noch unverformten Bereich trennt, bewegt sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} senkrecht zu $d\alpha$. Die drei Vektoren $d\alpha$, \mathbf{v} und \mathbf{b} liegen in einer gemeinsamen Gleitebene. Über den Burgers-Vektor kann damit jede Versetzung einem bestimmten Gleitsystem zugeordnet werden.

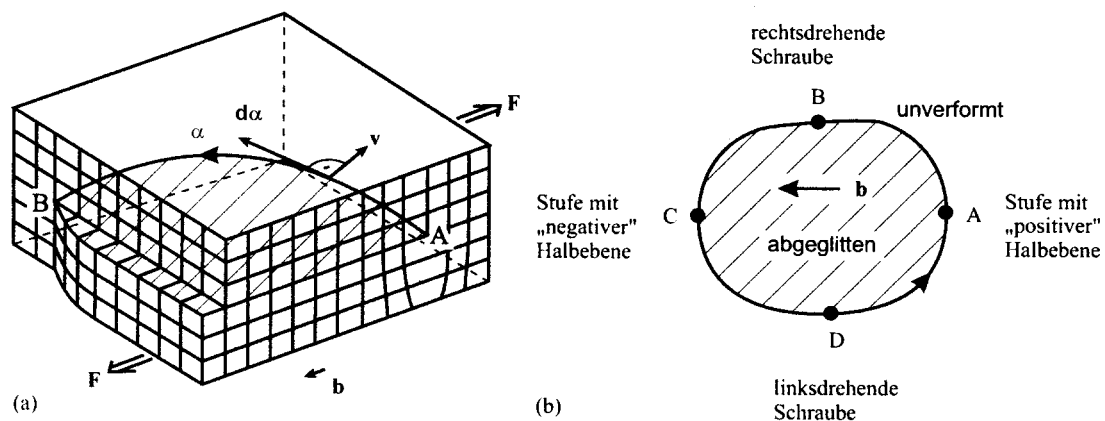


Abbildung 4.3: (a) Bewegung eines Versetzungssegments durch ein kubisch-primitives Gitter. (b) Blick senkrecht auf die Gleitebene: vollständiger Versetzungsring.

Entlang der Versetzungslinie kann sich der Charakter der Versetzung ändern. Stehen wie im Punkt A Linienelement $d\alpha$ und Burgersvektor \mathbf{b} senkrecht aufeinander, so spricht man von einer *Stufenversetzung*, bei einer parallelen Lage, wie im Punkt B von einer *Schraubenversetzung*. Topologisch betrachtet begrenzt eine Stufenversetzung dabei eine eingeschobene Halbebene, während die gestörte Atomanordnung um eine

Schraubenversetzung die Form eines Schraubengewindes besitzt. Zwischen A und B nimmt die Versetzung eine Mischform aus beiden an.

Mit Hilfe der topologischen Betrachtungen läßt sich bereits ein wichtiger Wechselwirkungsmechanismus von Versetzungen erklären: Treffen Segmente zweier Versetzungen, die sich in ihrem “Vorzeichen” unterscheiden (z.B. links- und rechtsdrehende Schraubenversetzungen, Stufenversetzungen mit positiver und negativer Halbebene), in einem Gleitsystem aufeinander, so können sie sich gegenseitig auslöschen.

(siehe Harder [25])

4.4.2 Versetzungsbildung und -auslöschung

Ein wichtiger Mechanismus zur Erzeugung von Versetzungen wurde 1950 von Frank und Read [15] vorgeschlagen: Ein Segment einer Stufenversetzung der Länge l (Abbildung 4.4) ist an den Punkten A und B festgehalten, was z.B. durch Fremdatome oder andere Versetzungen anderer Gleitsysteme geschehen kann. Durch Anlegen einer Schubspannung baucht es sich auf, wobei eine maximale Schubspannung von $\tau = Gb/l$ (G : Schubmodul) erforderlich ist, wenn das Segment Halbkreisform besitzt. Danach wird die Versetzung instabil (Dieter [14]) und wickelt sich um A und B auf. In C treffen ein links- und rechtsdrehender Schraubenanteil aufeinander und löschen sich aus. Übrig bleibt ein kompletter Versetzungsring und ein neues Versetzungssegment AB , das erneut ausgebaucht werden kann. Solch eine Quelle, für die es eine Reihe experimenteller Bestätigungen gibt (z.B. Dash [13]), kann unter Umständen Tausende von Versetzungen emittieren.

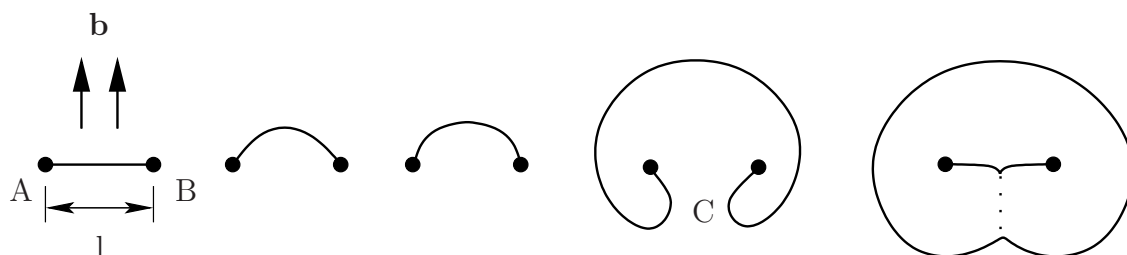


Abbildung 4.4: Versetzungsmultiplikation durch Frank-Read-Quelle.

Mit zunehmender Versetzungsdichte steigt gleichzeitig die Wahrscheinlichkeit, daß sich zwei Versetzungen unterschiedlichen Vorzeichens begegnen und auslöschen. Notwendig ist hierfür, daß die Begegnung auf einer gemeinsamen Gleitebene stattfindet. Es ist jedoch zu bedenken, daß Versetzungen auch dann Kräfte aufeinander ausüben, wenn sie sich auf voneinander entfernten Gleitebenen befinden. Dieses Phänomen erklärt sich aus den Eigenspannungsfeldern der Versetzungen, die aus den Störungen des Gitters um den Versetzungskern resultieren (z.B. Hirth/Lothe [26]). Zu anziehenden Kräften kommt es zwischen Versetzungssegmenten unterschiedlichen Vorzeichens. Sie können unter Umständen dafür sorgen, daß sich Versetzungen, die auf parallelen Gleitsystemen liegen, zueinander hinbewegen.

Aus energetischer Sicht entspricht das Anziehen und Auslöschen von Versetzungen dem Bestreben des Materials, einen möglichst einergiearmen Zustand einzunehmen.

(siehe Harder [25])

4.4.3 Wechselwirkung von Versetzungen

Versetzungen können sich in der Regel nicht ungestört durch das Kristallgitter bewegen. Fremdatome, Teilchen einer zweiten Phase und vor allem Wechselwirkung mit anderen Versetzungen sorgen dafür, daß sie immer wieder lokal aufgehalten und unter Umständen gänzlich immobilisiert werden. Da sich die Untersuchungen dieser Arbeit mit reinen Metallen beschäftigt, soll hier nur auf die gegenseitige Behinderung von Versetzungen eingegangen werden. Grundsätzlich lassen sich die Wechselwirkungsmechanismen danach einteilen, ob sie weit- oder kurzreichender Natur sind.

Zu weitreichenden Wechselwirkungen kommt es, wenn sich die Versetzungen während der Deformation in energetisch günstigen Strukturen anordnen (Holt [27]). Dabei überlagern sich die Spannungsfelder der beteiligten, in der Regel immobilisierten Versetzungen zu weitreichenden Spannungsfeldern ("kinematische Rückspannung"), die Bewegung der mobilen Versetzungen beeinflussen (Gerdes [16]).

Eine in der Literatur (z.B. Dieter [14], Kovacs [30], Honeycombe [28]) oft genannte Konfiguration, die zu weitreichenden Spannungen führt, ist der Aufstau von Versetzungen gleichen Vorzeichens vor einem Hindernis (Abbildung 4.5). Durch solche "pile-ups" kann beispielsweise die Versetzungserzeugung einer Frank-Read-Quelle beeinträchtigt bzw. schließlich ganz zum Stillstand gebracht werden.

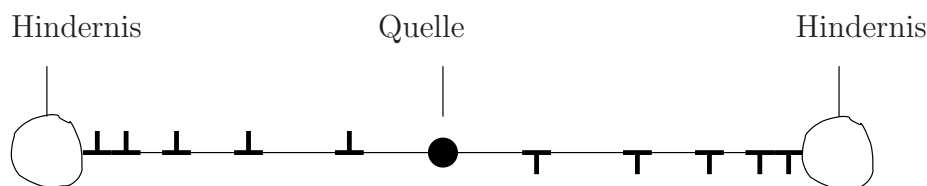


Abbildung 4.5: Aufstau ("pile-up") von Stufenversetzungen vor Hindernissen.

Im Laufe ihrer Bewegung treffen die Versetzungen auch auf Versetzungen anderer Gleitebenen, die sogenannten *Waldversetzungen*. Beim Durchschneiden dieser Waldversetzungen treten Wechselwirkungen kurzer Reichweite auf. Art und Größe der Behinderung durch einen Schneidvorgang bestimmen sich dabei durch mehrere Einflußfaktoren. Zum einen müssen die Wechselwirkungen der elastischen Spannungsfelder überwunden werden: Bei sich abstoßenden Versetzungen sind Kräfte zur Annäherung aufzubringen. Demgegenüber können anziehende Versetzungen stabile Versetzungsknoten bilden, für deren Auseinanderreißen ebenfalls Kraft aufgewendet werden muss (Baird und Gale [5]). Ferner entstehen aus topologischen Gründen in einem oder in beiden Versetzungssegmenten Kinken oder Sprünge (z.B. Reed-Hill [31]). Unter einer Kinke versteht man einen Knick in der Versetzungslinie, der innerhalb der Gleitebene liegt, während Sprünge der Versetzungslinie aus der Gleitebene heraus führen. Da die Energie einer Versetzung proportional zu ihrer Länge ist (z.B. Haasen [19]) und diese Länge durch Sprung oder Kinke zunimmt, ist für deren Bildung ebenfalls Arbeit zu verrichten.

Der Bewegung einer Versetzung stellt sich somit eine Hindernislandschaft entgegen, die sich aus der Überlagerung von weit- und kurzreichenden Wechselwirkungen ergibt. Das Ausmaß der Behinderung kann dabei von Versetzung zu Versetzung, abhängig vom Aufenthaltsort, variieren. Eine den Anfangsbereich der Verformung betreffende Konsequenz besteht darin, die Fließgrenze nicht zu eng als Begrenzung eines rein elastischen

Bereichs, sondern vielmehr als Schwellenwert, ab dem eine merkliche plastische Deformation auftritt, zu verstehen.

Auch nach Überschreitung des Schwellenwertes bestimmt das Zusammenwirken von äußerer Spannung, kinematischer Rückspannung und die Größe kurzreichender Hindernisse, ob eine Versetzung überwunden wird oder nicht. Da die gesamte Versetzungsdichte und mit ihr die Zahl der notwendigen Schneidprozesse während der Deformation ansteigt und außerdem die kinematische Rückspannung mit der sich entwickelnden Struktur wächst, wird die Bewegung der mobilen Versetzungen in zunehmendem Maße erschwert. Makroskopisch macht sich dies durch eine ansteigende Spannung bemerkbar. Dieses Phänomen wird als *Verfestigung* bezeichnet.

In Anbetracht der geschilderten mikromechanischen Ursachen, die zur Verfestigung beitragen, wird deutlich, daß man zwischen isotroper und anisotroper Verfestigung zu unterscheiden hat:

- **Isotrope Verfestigung**

Die Dichte der Waldversetzungen, die die Verfestigung durch kurzreichende Wechselwirkungen bestimmt, ist vor (bezogen auf die Ausbreitungsrichtung einer mobilen Versetzung) nicht anders als hinter einer mobilen Versetzung. Dreht man den Belastungssinn um, so ändert sich das Ausmaß der Behinderung nicht. Die Verfestigung durch eine zunehmende Waldversetzungsdichte ist somit, bezogen auf ein Gleitsystem, isotrop und hat somit *skalaren Charakter*.

Die isotrope Verfestigung wird in dieser Arbeit mit k bezeichnet.

- **Kinematische Verfestigung**

Die mit Strukturbildung in Zusammenhang zu bringende Versetzungswechselwirkungen lassen sich durch weitreichende Spannungsfelder erklären. Sie haben folglich *tensoriellen Charakter* und hängen vom Richtungssinn der Belastung ab. Dies wird am Beispiel der pile-ups vor einem Hindernis besonders anschaulich: Die Bewegung einer mobilen Versetzung in Richtung des Aufstaus wird durch dessen Spannungsfeld behindert, bei Lastumkehr wird die Bewegung in Gegenrichtung unterstützt. Die Verfestigung durch Strukturentwicklung ist somit, bezogen auf ein Gleitsystem, anisotrop.

Die kinematische Verfestigung wird in dieser Arbeit mit ξ bezeichnet.

(siehe Harder [25])

4.5 Idee zur Beschreibung der kinematischen Verfestigung

Die weitreichenden Versetzungswechselwirkungen der kinematischen Verfestigung verzerren lokal das Gitter und speichern somit Energie. Diese im Gitter gespeicherte Energie soll in einem kinematischen Anteil der freien Energiefunktion ψ_{kin} zum Ausdruck kommen. Um den anisotropen Charakter der Wechselwirkungen hervorzuheben, soll die Funktion ψ_{kin} von einem tensoriellen Verzerrungstensor, $\hat{\mathbf{T}}_k$ genannt, abhängen. Daher macht es Sinn, den plastischen Anteil des Deformationsgradienten \mathbf{F}_p weiter in einen Anteil \mathbf{F}_k , der die lokale Deformation des Gitters beschreibt, und in einen Anteil \mathbf{F}_r , der nur die Bewegung der Atomlagen beim Wandern von Versetzung darstellt und nicht zur Verzerrung des Gitters beiträgt, zu zerlegen. Aus dem Anteil \mathbf{F}_k soll der Verzerrungstensor $\hat{\mathbf{T}}_k$ hervorgehen, der die lokale Verzerrung des Gitters um aufgestaute Versetzungen beschreibt, ähnlich wie der Verzerrungstensor $\hat{\mathbf{T}}_e$ im elastischen Anteil der freien Energiefunktion ψ_e die elastische Verzerrung des idealen Gitters darstellt. Außerdem wird in der Zwischenkonfiguration ein zusätzlicher Rotationstensor Δ eingeführt, der die gemittelte Rotation des gestörten Gitters um aufgestaute Versetzungen herum beschreibt, ähnlich wie der Rotationstensor Φ die Rotation des idealen Gitters in der Zwischenkonfiguration beschreibt.

Dies kann man sich im ebenen Fall veranschaulichen. Die Rotation des idealen Gitters wird durch den Winkel θ_e beschrieben. Um aufgestaute Versetzungen herum ist das Gitter verzerrt und es macht Sinn, dort einen zusätzlichen gemittelten Winkel θ_k einzuführen, der die abweichende Rotation des Gitters um diese Störstelle beschreibt.

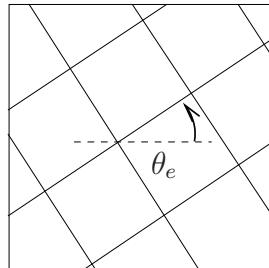


Abbildung 4.6: Der Winkels θ_e als Rotation des idealen Gitters

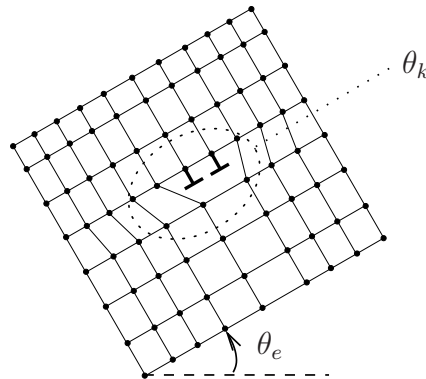


Abbildung 4.7: Der Winkels θ_k als gemittelte Rotation des Gitters um eine Gitterstörung

Zerlegung des plastischen Anteils des Deformationsgradienten:

$$\mathbf{F}_p^{(i)} = \mathbf{F}_k^{(i)} \mathbf{F}_r^{(i)} = \mathbf{F}_k^{(i)} \Delta_r^{(i)} (\Delta_r^{(i)})^T \mathbf{F}_r^{(i)}$$

Hier ist $\Delta_r^{(i)}$ ein orthogonaler Tensor.

Hierbei werden zusätzliche Konfigurationen $\bar{\mathcal{R}}_t^{(i)}$ eingeführt.

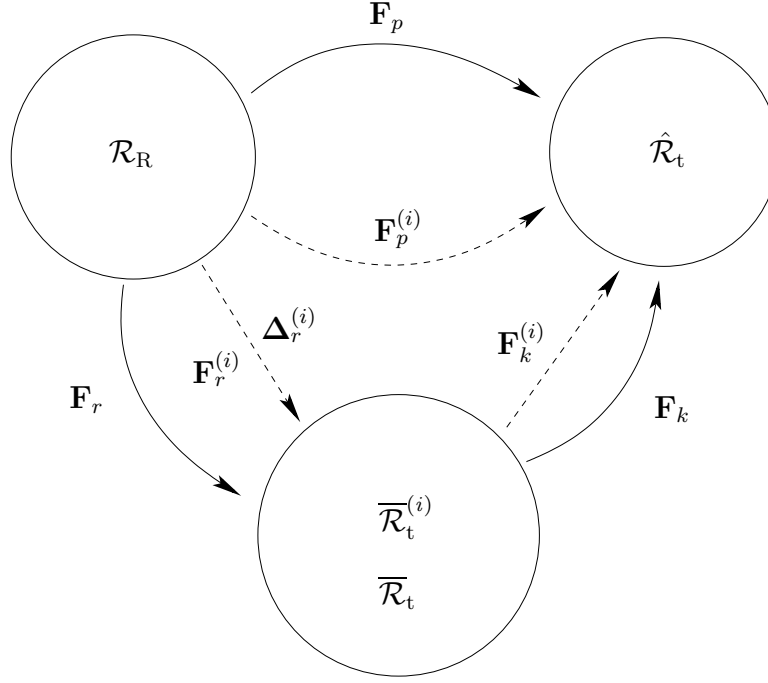


Abbildung 4.8: Zerlegung der plastischen Deformation

Zerlegung des plastischen Anteils der freien Energiefunktion in einen kinematischen Anteil (für die kinematische Verfestigung) und in einen isotropen Anteil (für die isotrope Verfestigung):

$$\psi_p = \psi_{kin} + \psi_{iso} \quad (4.30)$$

Der kinematische Anteil der freien Energiefunktion ψ_{kin} soll sich als Mittelwert aus den kinematischen Energiefunktionen aller Gleitsysteme darstellen lassen:

$$\boxed{\rho_R \cdot \psi_{kin} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \psi_{kin}^{(i)}(\Delta_r^{(i)}, \mathbf{F}_k^{(i)})} \quad . \quad (4.31)$$

Ein Ansatz für $\psi_{kin}^{(i)}$

Mit der polaren Zerlegung $\mathbf{F}_k^{(i)} = \hat{\mathbf{V}}_k^{(i)} \mathbf{R}_k^{(i)}$ ergibt sich

$$\psi_{kin}^{(i)} = \bar{\psi}_{kin}^{(i)}(\Delta_r^{(i)}, \mathbf{F}_k^{(i)}) = \bar{\psi}_{kin}^{(i)}(\Delta_r^{(i)}, \hat{\mathbf{V}}_k^{(i)} \mathbf{R}_k^{(i)}) \quad .$$

Einführung des *Verzerrungstensors* $\hat{\Gamma}_k^{(i)} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - (\hat{\mathbf{V}}_k^{(i)})^{-2})$:

$$\psi_{kin}^{(i)} = \bar{\psi}_{kin}^{(i)}(\Delta_r^{(i)}, \hat{\mathbf{V}}_k^{(i)} \mathbf{R}_k^{(i)}) = \bar{\psi}_{kin}^{(i)}(\Delta_r^{(i)}, \hat{\Gamma}_k^{(i)}, \mathbf{R}_k^{(i)}) \quad .$$

Diese Form wird nun durch Objektivitätsforderungen eingeschränkt.

Bezüglich Drehungen $\bar{\mathbf{Q}}^{(i)}$ der Konfigurationen $\bar{\mathcal{R}}_t^{(i)}$ transformieren sich die $\Delta_r^{(i)}$ und die $\mathbf{R}_k^{(i)}$ wie:

$$\Delta_r^{(i)} \rightarrow (\Delta_r^{(i)})^* = \bar{\mathbf{Q}}^{(i)} \Delta_r^{(i)} \quad \text{und} \quad \mathbf{R}_k^{(i)} \rightarrow (\mathbf{R}_k^{(i)})^* = \mathbf{R}_k^{(i)} \bar{\mathbf{Q}}^{(i)T} \quad .$$

Damit ergibt sich

$$\psi_{kin}^{(i)} = \bar{\psi}_{kin}^{(i)}(\Delta_r^{(i)}, \hat{\Gamma}_k^{(i)}, \mathbf{R}_k^{(i)}) = \bar{\psi}_{kin}^{(i)}(\bar{\mathbf{Q}}^{(i)} \Delta_r^{(i)}, \hat{\Gamma}_k^{(i)}, \mathbf{R}_k^{(i)} \bar{\mathbf{Q}}^{(i)T}) \quad .$$

Setze nun speziell: $\bar{\mathbf{Q}}^{(i)} = (\Delta_r^{(i)})^T$, so folgt für den plastischen Anteil der freien Energiefunktion

$$\boxed{\psi_{kin}^{(i)} = \bar{\psi}_{kin}^{(i)}(\mathbf{1}, \hat{\Gamma}_k^{(i)}, \underbrace{\mathbf{R}_k^{(i)} \Delta_r^{(i)}}_{=: \Delta^{(i)}}) =: \tilde{\psi}_{kin}^{(i)}(\underbrace{\Delta^{(i)T} \hat{\Gamma}_k^{(i)} \Delta^{(i)}}_{=: \tilde{\Gamma}_k^{(i)}})} \quad .} \quad (4.32)$$

Berechnung von $\dot{\psi}_{kin}^{(i)}$

Ausgehend von

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_{kin}^{(i)} &= \frac{\partial \tilde{\psi}_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_k^{(i)}} \cdot \dot{\tilde{\Gamma}}_k^{(i)} \\ &= \frac{\partial \tilde{\psi}_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_k^{(i)}} \cdot \Delta^{(i)T} \dot{\tilde{\Gamma}}_k^{(i)} \Delta^{(i)} + \frac{\partial \tilde{\psi}_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_k^{(i)}} \cdot (\dot{\Delta}^{(i)})^T \hat{\Gamma}_k^{(i)} \Delta^{(i)} + \frac{\partial \tilde{\psi}_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_k^{(i)}} \cdot \Delta^{(i)T} \hat{\Gamma}_k^{(i)} \dot{\Delta}^{(i)} \\ &= \Delta^{(i)} \frac{\partial \tilde{\psi}_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_k^{(i)}} \Delta^{(i)T} \cdot \dot{\tilde{\Gamma}}_k^{(i)} + tr \left(2 \hat{\Gamma}_k^{(i)} \Delta^{(i)} \frac{\partial \tilde{\psi}_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_k^{(i)}} \Delta^{(i)T} \Delta^{(i)} (\dot{\Delta}^{(i)})^T \right) \end{aligned}$$

($\tilde{\Gamma}_k^{(i)}$ ist symmetrisch)

folgt mit $\dot{\tilde{\Gamma}}_k^{(i)} = \overset{\Delta}{\hat{\Gamma}}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{L}}_p^T \hat{\Gamma}_k^{(i)} - \hat{\Gamma}_k^{(i)} \hat{\mathbf{L}}_p$:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_{kin}^{(i)} &= \Delta^{(i)} \frac{\partial \tilde{\psi}_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_k^{(i)}} \Delta^{(i)T} \cdot \overset{\Delta}{\hat{\Gamma}}_k^{(i)} - \Delta^{(i)} \frac{\partial \tilde{\psi}_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_k^{(i)}} \Delta^{(i)T} \cdot \mathbf{L}_p^T \hat{\Gamma}_k^{(i)} - \Delta^{(i)} \frac{\partial \tilde{\psi}_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_k^{(i)}} \Delta^{(i)T} \cdot \hat{\Gamma}_k^{(i)} \hat{\mathbf{L}}_p \\ &\quad + 2 \hat{\Gamma}_k^{(i)} \Delta^{(i)} \frac{\partial \tilde{\psi}_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_k^{(i)}} \Delta^{(i)T} \cdot \dot{\Delta}^{(i)} \Delta^{(i)T} \quad . \end{aligned}$$

Mit $\overset{\Delta}{\hat{\Gamma}}_k^{(i)} = \overset{\Delta}{\hat{\Gamma}}_p^{(i)} - \overset{\Delta}{\hat{\Gamma}}_r^{(i)} = \hat{\mathbf{D}}_p^{(i)} - \hat{\mathbf{D}}_r^{(i)}$ folgt:

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}_{kin}^{(i)} &= \Delta^{(i)} \frac{\partial \tilde{\psi}_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_k^{(i)}} \Delta^{(i)T} \cdot \left(\hat{\mathbf{D}}_p^{(i)} - \hat{\mathbf{D}}_r^{(i)} \right) - 2\hat{\Gamma}_k^{(i)} \Delta^{(i)} \frac{\partial \tilde{\psi}_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_k^{(i)}} \Delta^{(i)T} \cdot \hat{\mathbf{L}}_p^{(i)} \\
&\quad + 2\hat{\Gamma}_k^{(i)} \Delta^{(i)} \frac{\partial \tilde{\psi}_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_k^{(i)}} \Delta^{(i)T} \cdot \dot{\Delta}^{(i)} \Delta^{(i)T} \\
&= \Delta^{(i)} \frac{\partial \tilde{\psi}_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_k^{(i)}} \Delta^{(i)T} \cdot \left(\hat{\mathbf{D}}_p^{(i)} - \hat{\mathbf{D}}_r^{(i)} \right) - 2\hat{\Gamma}_k^{(i)} \Delta^{(i)} \frac{\partial \tilde{\psi}_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_k^{(i)}} \Delta^{(i)T} \cdot \left(\hat{\mathbf{D}}_p^{(i)} + \hat{\mathbf{W}}_p^{(i)} \right) \\
&\quad + 2\hat{\Gamma}_k^{(i)} \Delta^{(i)} \frac{\partial \tilde{\psi}_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_k^{(i)}} \Delta^{(i)T} \cdot \dot{\Delta}^{(i)} \Delta^{(i)T} \\
&= \left(1 - 2\hat{\Gamma}_k^{(i)} \right) \Delta^{(i)} \frac{\partial \tilde{\psi}_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_k^{(i)}} \Delta^{(i)T} \cdot \hat{\mathbf{D}}_p^{(i)} + 2\hat{\Gamma}_k^{(i)} \Delta^{(i)} \frac{\partial \tilde{\psi}_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_k^{(i)}} \Delta^{(i)T} \cdot \left(\dot{\Delta}^{(i)} \Delta^{(i)T} - \hat{\mathbf{W}}_p^{(i)} \right) \\
&\quad - \Delta^{(i)} \frac{\partial \tilde{\psi}_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_k^{(i)}} \Delta^{(i)T} \cdot \hat{\mathbf{D}}_r^{(i)} \quad .
\end{aligned}$$

Definiere nun den **Spannungstensor der kinematischen Verfestigung**

$$\boxed{\hat{\mathbf{Z}}^{(i)} := \frac{\partial \tilde{\psi}_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_k^{(i)}} = \Delta^{(i)} \frac{\partial \tilde{\psi}_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_k^{(i)}} \Delta^{(i)T}} \quad (4.33)$$

als die thermodynamisch Konjugierte zu $\hat{\Gamma}_k^{(i)}$.

Damit läßt sich $\dot{\psi}_{kin}^{(i)}$ vereinfachen:

$$\dot{\psi}_{kin}^{(i)} = \left(1 - 2\hat{\Gamma}_k^{(i)} \right) \hat{\mathbf{Z}}^{(i)} \cdot \hat{\mathbf{D}}_p^{(i)} + 2\hat{\Gamma}_k^{(i)} \hat{\mathbf{Z}}^{(i)} \cdot \left(\dot{\Delta}^{(i)} \Delta^{(i)T} - \hat{\mathbf{W}}_p^{(i)} \right) - \hat{\mathbf{Z}}^{(i)} \cdot \hat{\mathbf{D}}_r^{(i)} \quad .$$

Da $\hat{\mathbf{Z}}^{(i)}$ symmetrisch und $\dot{\Delta}^{(i)} \Delta^{(i)T}$ antisymmetrisch sind, gilt:

$$\dot{\psi}_{kin}^{(i)} = \left(1 - 2\hat{\Gamma}_k^{(i)} \right) \hat{\mathbf{Z}}^{(i)} \cdot \hat{\mathbf{L}}_p^{(i)} - \left(1 - 2\hat{\Gamma}_k^{(i)} \right) \hat{\mathbf{Z}}^{(i)} \cdot \dot{\Delta}^{(i)} \Delta^{(i)T} - \hat{\mathbf{Z}}^{(i)} \cdot \hat{\mathbf{D}}_r^{(i)} \quad . \quad (4.34)$$

Definiere nun den **Translationstensor der kinematischen Verfestigung** für das (i)-te Gleitsystem $\hat{\xi}^{(i)}$ als

$$\boxed{\hat{\xi}^{(i)} := \left(1 - 2\hat{\Gamma}_k^{(i)} \right) \hat{\mathbf{Z}}^{(i)}} \quad . \quad (4.35)$$

Dann ergibt sich für $\dot{\psi}_{kin}^{(i)}$ die Gleichung:

$$\boxed{\dot{\psi}_{kin}^{(i)} = \hat{\xi}^{(i)} \cdot \hat{\mathbf{L}}_p^{(i)} - \hat{\xi}^{(i)} \cdot \dot{\Delta}^{(i)} \Delta^{(i)T} - \hat{\mathbf{Z}}^{(i)} \cdot \hat{\mathbf{D}}_r^{(i)}} \quad . \quad (4.36)$$

4.6 Einbau des plastischen Anteils der Freien Energiefunktion in die Restungleichung

Die Restungleichung (4.29) lautete:

$$\hat{\mathbf{P}} \cdot (\hat{\mathbf{L}}_p - \dot{\mathbf{\Phi}} \mathbf{\Phi}^T) - \rho_R \dot{\psi}_p \geq 0 \quad .$$

Nach Einsetzen von (4.14), (4.30) und (4.31) folgt:

$$\begin{aligned} n \cdot \left(\hat{\mathbf{P}} \cdot (\hat{\mathbf{L}}_p - \dot{\mathbf{\Phi}} \mathbf{\Phi}^T) - \rho_R \dot{\psi}_{kin} \right) &= \\ n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\hat{\mathbf{P}} \cdot (\hat{\mathbf{L}}_p^{(i)} - \dot{\mathbf{\Phi}} \mathbf{\Phi}^T) - \dot{\psi}_{kin}^{(i)} \right) &= \\ \sum_{i=1}^n (\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(i)}) \cdot (\hat{\mathbf{L}}_p^{(i)} - \dot{\mathbf{\Phi}} \mathbf{\Phi}^T) + \sum_{i=1}^n \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(i)} \cdot (\hat{\mathbf{L}}_p^{(i)} - \dot{\mathbf{\Phi}} \mathbf{\Phi}^T) - \sum_{i=1}^n \dot{\psi}_{kin}^{(i)} &\geq 0 \quad . \end{aligned}$$

Einsetzen von

$$(\hat{\mathbf{L}}_p^{(i)} - \dot{\mathbf{\Phi}} \mathbf{\Phi}^T) = \dot{\gamma}_p^{(i)} \hat{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)}$$

ergibt

$$\boxed{\sum_{i=1}^n \left\{ (\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(i)}) \cdot (\dot{\gamma}_p^{(i)} \hat{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)}) + \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(i)} \cdot (\hat{\mathbf{L}}_p^{(i)} - \dot{\mathbf{\Phi}} \mathbf{\Phi}^T) - \dot{\psi}_{kin}^{(i)} \right\} \geq 0} \quad . \quad (4.37)$$

Einsetzen von

$$\dot{\psi}_{kin}^{(i)} = \left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(i)} \cdot \hat{\mathbf{L}}_p^{(i)} - \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(i)} \cdot \dot{\boldsymbol{\Delta}}^{(i)} \boldsymbol{\Delta}^{(i)T} - \hat{\mathbf{Z}}^{(i)} \cdot \hat{\mathbf{D}}_r^{(i)} \right)$$

ergibt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(i)}) \cdot (\dot{\gamma}_p^{(i)} \hat{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)}) + \sum_{i=1}^n \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(i)} \cdot (\hat{\mathbf{L}}_p^{(i)} - \dot{\mathbf{\Phi}} \mathbf{\Phi}^T) &+ \\ \sum_{i=1}^n \left(-\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(i)} \cdot \hat{\mathbf{L}}_p^{(i)} + \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(i)} \cdot \dot{\boldsymbol{\Delta}}^{(i)} \boldsymbol{\Delta}^{(i)T} + \hat{\mathbf{Z}}^{(i)} \cdot \hat{\mathbf{D}}_r^{(i)} \right) &\geq 0 \quad . \end{aligned} \quad (4.38)$$

\Leftrightarrow

$$\boxed{\sum_{i=1}^n \left\{ (\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(i)}) \cdot (\dot{\gamma}_p^{(i)} \hat{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)}) + \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(i)} \cdot (\dot{\boldsymbol{\Delta}}^{(i)} \boldsymbol{\Delta}^{(i)T} - \dot{\mathbf{\Phi}} \mathbf{\Phi}^T) + \hat{\mathbf{Z}}^{(i)} \cdot \hat{\mathbf{D}}_r^{(i)} \right\} \geq 0} \quad (4.39)$$

Hinreichende Bedingungen zum Lösen von (4.39) sind:

4.6.1 Fließregel für Viskoplastizität

$$(\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(i)}) \cdot (\dot{\gamma}_p^{(i)} \hat{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)}) \geq 0 \quad (4.40)$$

Diese Gleichung kann mit der Beziehung

$$(\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(i)}) \cdot (\hat{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)}) = \text{tr} \left\{ (\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(i)}) \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{s}}^{(i)} \right\} = \hat{\mathbf{s}}^{(i)} \cdot (\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(i)}) \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \quad (4.41)$$

und den Definitionen der **Schmid-Spannung** $\tau^{(i)}$ und der **kinematischen Verfestigung** $\xi^{(i)}$

$$\tau^{(i)} := \hat{\mathbf{s}}^{(i)} \cdot \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \quad \text{und} \quad \xi^{(i)} := \hat{\mathbf{s}}^{(i)} \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(i)} \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \quad (4.42)$$

umgeschrieben werden zu:

$$\boxed{\dot{\gamma}_p^{(i)} (\tau^{(i)} - \xi^{(i)}) \geq 0} \quad . \quad (4.43)$$

Hinreichende Bedingung für (4.43) ist:

$$\boxed{\dot{\gamma}_p^{(i)} := \frac{\langle |\tau^{(i)} - \xi^{(i)}| - k_0^{(i)} \rangle^{m^{(i)}}}{\eta^{(i)}} \frac{\tau^{(i)} - \xi^{(i)}}{|\tau^{(i)} - \xi^{(i)}|}} \quad . \quad (4.44)$$

Der Betrag von $\dot{\gamma}_p^{(i)}$ ist die **plastische Bogenlänge** $|\dot{\gamma}_p^{(i)}| =: \dot{s}^{(i)}$ im (i)-ten Gleitsystem ($m^{(i)} > 0$, $\eta^{(i)} > 0$).

Hierbei stellt $k_0^{(i)}$ die **konstante isotrope Verfestigung im (i)-ten Gleitsystem** dar.

4.6.2 Plastische Spins

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(i)} \cdot (\dot{\boldsymbol{\Delta}}^{(i)} \boldsymbol{\Delta}^{(i)T} - \dot{\boldsymbol{\Phi}} \boldsymbol{\Phi}^T) \geq 0 \quad (4.45)$$

$\dot{\boldsymbol{\Delta}}^{(i)} \boldsymbol{\Delta}^{(i)T} - \dot{\boldsymbol{\Phi}} \boldsymbol{\Phi}^T$ läßt sich zu

$$\dot{\boldsymbol{\Delta}}^{(i)} \boldsymbol{\Delta}^{(i)T} - \dot{\boldsymbol{\Phi}} \boldsymbol{\Phi}^T = \underbrace{\dot{\boldsymbol{\Delta}}^{(i)} \boldsymbol{\Delta}^{(i)T} - \hat{\mathbf{W}}_p^{(i)}}_{-\hat{\boldsymbol{\Omega}}_k^{(i)}} + \underbrace{\hat{\mathbf{W}}_p^{(i)} - \dot{\boldsymbol{\Phi}} \boldsymbol{\Phi}^T}_{\hat{\boldsymbol{\Omega}}_e^{(i)}} \quad (4.46)$$

umschreiben, wobei $\hat{\boldsymbol{\Omega}}_e^{(i)}$ der elastische Anteil und $\hat{\boldsymbol{\Omega}}_k^{(i)}$ der kinematische Anteil des Plastischen Spins des (i)-ten Gleitsystems sind.

Hinreichende Bedingung für (4.45) ist:

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\Omega}}_e^{(i)} - \hat{\boldsymbol{\Omega}}_k^{(i)} = \dot{\boldsymbol{\Delta}}^{(i)} \boldsymbol{\Delta}^{(i)T} - \dot{\boldsymbol{\Phi}} \boldsymbol{\Phi}^T = \lambda_{\Delta}^{(i)} \dot{s}^{(i)} \frac{\partial \hat{\chi}^{(i)}}{\partial \hat{\boldsymbol{\xi}}_A^{(i)}}} \quad (4.47)$$

Hierbei ist $\lambda_{\Delta}^{(i)} > 0$, $\dot{s}^{(i)} := \frac{\langle |\tau^{(i)} - \xi^{(i)}| - k_0^{(i)} \rangle^{m^{(i)}}}{\eta^{(i)}} > 0$ und $\hat{\chi}^{(i)}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_A^{(i)})$ eine konvexe Funktion, die den Nullpunkt enthält. $\hat{\boldsymbol{\xi}}_A^{(i)}$ ist der antisymmetrische Anteil von $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(i)}$.

4.6.3 Evolutionsgleichung für $\dot{\gamma}_k^{(i)}$

$$\hat{\mathbf{Z}}^{(i)} \cdot \hat{\mathbf{D}}_r^{(i)} \geq 0 \quad (4.48)$$

Hinreichende Bedingung hierfür ist:

$$\boxed{\hat{\mathbf{D}}_r^{(i)} = \dot{s}^{(i)} \hat{\mathbb{K}}^{(i)} [\hat{\mathbf{Z}}^{(i)}]} \quad (4.49)$$

Hier ist $\hat{\mathbb{K}}^{(i)}$ ein positiv definiter Tensor 4. Stufe.

Nun muss eine Darstellung für den Tensor $\hat{\mathbb{K}}^{(i)}$ gefunden werden. Da für die linke Seite von (4.49) gilt

$$\hat{\mathbf{D}}_r^{(i)} = \overset{\Delta}{\hat{\Gamma}}_r^{(i)} = \mathbf{F}_p^{(i)T-1} \dot{\mathbf{E}}_r^{(i)} \mathbf{F}_p^{(i)-1}$$

und

$$\mathbf{E}_r^{(i)} = \frac{1}{2} ((\mathbf{F}_r^{(i)})^T \mathbf{F}_r^{(i)} - \mathbf{1})$$

liegt auf der linken Seite von (4.49) die Kinematik fest.

Ausgehend von der Form für $\overset{\Delta}{\hat{\Gamma}}_r^{(i)} = \hat{\mathbf{D}}_r^{(i)}$ wird nun eine Form des Tensors $\hat{\mathbb{K}}^{(i)}$ gesucht.

Darstellung von $\hat{\mathbb{K}}^{(i)}$

Nach Asaro gilt für eine einfache Scherung die Darstellung:

$$\tilde{\mathbf{F}}_r^{(i)} = \gamma_r^{(i)} \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} + \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} + \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} + \tilde{\mathbf{v}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{v}}^{(i)} \quad (4.50)$$

Es gilt die Transformation:

$$\tilde{\mathbf{F}}_p^{(i)} = \Phi^T \mathbf{F}_p^{(i)} = \Phi^T \mathbf{F}_k^{(i)} \mathbf{F}_r^{(i)} = \underbrace{\Phi^T \mathbf{F}_k^{(i)} \Delta_r^{(i)}}_{=\tilde{\mathbf{F}}_k^{(i)}} \underbrace{\Delta_r^{(i)T} \mathbf{F}_r^{(i)}}_{=\tilde{\mathbf{F}}_r^{(i)}} \quad (4.51)$$

Also für die zurückgedrehten Größen (die einfache Scherungen sind)

$$\tilde{\mathbf{F}}_k^{(i)} = \Phi^T \mathbf{F}_k^{(i)} \Delta_r^{(i)} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{F}}_r^{(i)} = \Delta_r^{(i)T} \mathbf{F}_r^{(i)} \quad (4.52)$$

Berechnung von $\mathbf{E}_r^{(i)}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_r^{(i)} &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}_r^{(i)T} \mathbf{F}_r^{(i)} - \mathbf{1}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}_r^{(i)T} \Delta_r^{(i)} \Delta_r^{(i)T} \mathbf{F}_r^{(i)} - \mathbf{1}) \\ &= \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{F}}_r^{(i)T} \tilde{\mathbf{F}}_r^{(i)} - \mathbf{1}) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{F}}_r^{(i)T} \tilde{\mathbf{F}}_r^{(i)} &= \{ \gamma_r^{(i)} \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} + \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} + \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} + \tilde{\mathbf{v}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{v}}^{(i)} \} \\
&\quad \{ \gamma_r^{(i)} \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} + \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} + \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} + \tilde{\mathbf{v}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{v}}^{(i)} \} \\
&= \gamma_r^{(i)2} \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} + \gamma_r^{(i)} (\tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} + \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{n}}^{(i)}) + \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} + \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} + \tilde{\mathbf{v}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{v}}^{(i)}
\end{aligned}$$

und

$$\frac{d}{dt} \left(\tilde{\mathbf{F}}_r^{(i)T} \tilde{\mathbf{F}}_r^{(i)} \right) = 2\gamma_r^{(i)} \dot{\gamma}_r^{(i)} \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} + \dot{\gamma}_r^{(i)} (\tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} + \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{n}}^{(i)}) \quad .$$

Damit ergibt sich

$$\mathbf{E}_r^{(i)} = \frac{1}{2} \left(\gamma_r^{(i)2} \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} + \gamma_r^{(i)} (\tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} + \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{n}}^{(i)}) \right)$$

und für die Ableitung

$$\dot{\mathbf{E}}_r^{(i)} = \gamma_r^{(i)} \dot{\gamma}_r^{(i)} \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} + \frac{1}{2} \dot{\gamma}_r^{(i)} (\tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} + \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{n}}^{(i)}) \quad .$$

Für $\hat{\mathbf{D}}_r^{(i)}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{D}}_r^{(i)} &= \mathbf{F}_p^{(i)T-1} \dot{\mathbf{E}}_r^{(i)} \mathbf{F}_p^{(i)-1} \\
&= \mathbf{F}_p^{(i)T-1} \dot{\gamma}_r^{(i)} \left(\gamma_r^{(i)} \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} + \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} + \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{n}}^{(i)}) \right) \mathbf{F}_p^{(i)-1} \quad .
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Mit

$$\mathbf{F}_p^{(i)-1} = -\gamma_p^{(i)} \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)} + \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{s}}^{(i)} + \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)} + \tilde{\mathbf{v}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{v}}^{(i)}$$

und

$$\mathbf{F}_p^{(i)T-1} = -\gamma_p^{(i)} \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} + \hat{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} + \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} + \hat{\mathbf{v}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{v}}^{(i)}$$

ergibt sich

$$\hat{\mathbf{D}}_r^{(i)} = \dot{\gamma}_r^{(i)} \left\{ (\gamma_r^{(i)} - \gamma_p^{(i)}) \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)} + \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{s}}^{(i)} + \hat{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)}) \right\} \quad . \tag{4.54}$$

Damit läßt sich die hinreichende Bedingung

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{D}}_r^{(i)} &= \dot{\gamma}_r^{(i)} \left\{ (\gamma_r^{(i)} - \gamma_p^{(i)}) \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)} + \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{s}}^{(i)} + \hat{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)}) \right\} \\
&= \dot{\gamma}_r^{(i)} \hat{\mathbb{K}}^{(i)} [\hat{\mathbf{Z}}^{(i)}]
\end{aligned} \tag{4.55}$$

auswerten.

Ansatz:

$$\boxed{\hat{\mathbb{K}}^{(i)} = b^{(i)} \hat{\mathbf{X}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{X}}^{(i)}} \tag{4.56}$$

wobei

$$\hat{\mathbf{X}}^{(i)} = \underbrace{(\gamma_r^{(i)} - \gamma_p^{(i)})}_{= -\gamma_k^{(i)}} \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)} + \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{s}}^{(i)} + \hat{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)}) \quad . \tag{4.57}$$

Vergleich von (4.55) mit (4.56) ergibt:

$$\dot{\gamma}_r^{(i)} = \dot{\gamma}_p^{(i)} - \dot{\gamma}_k^{(i)} = \dot{s}^{(i)} b^{(i)} \left\{ -\gamma_k^{(i)} \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \cdot \hat{\mathbf{Z}}^{(i)} \hat{\mathbf{n}}^{(i)} + \hat{\mathbf{s}}^{(i)} \cdot \hat{\mathbf{Z}}^{(i)} \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \right\} \quad (4.58)$$

oder auch

$$\boxed{\dot{\gamma}_k^{(i)} = \dot{\gamma}_p^{(i)} - \dot{s}^{(i)} b^{(i)} \left\{ -\gamma_k^{(i)} \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \cdot \hat{\mathbf{Z}}^{(i)} \hat{\mathbf{n}}^{(i)} + \hat{\mathbf{s}}^{(i)} \cdot \hat{\mathbf{Z}}^{(i)} \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \right\}} \quad . \quad (4.59)$$

$(b^{(i)} > 0)$

4.6.4 Berechnung des Verzerrungstensors $\hat{\Gamma}_k^{(i)}$

Es gilt:

$$\hat{\Gamma}_k^{(i)} = \mathbf{F}_p^{(i)T-1} \mathbf{E}_k^{(i)} \mathbf{F}_p^{(i)-1} \quad \text{mit} \quad \mathbf{E}_k^{(i)} = \mathbf{E}_p^{(i)} - \mathbf{E}_r^{(i)} \quad . \quad (4.60)$$

Mit

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_p^{(i)} &= \frac{1}{2} ((\mathbf{F}_p^{(i)})^T \mathbf{F}_p^{(i)} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} \left(\left(\Phi \tilde{\mathbf{F}}_p^{(i)} \right)^T \left(\Phi \tilde{\mathbf{F}}_p^{(i)} \right) - \mathbf{1} \right) = \frac{1}{2} \left((\tilde{\mathbf{F}}_p^{(i)})^T \tilde{\mathbf{F}}_p^{(i)} - \mathbf{1} \right) \\ \mathbf{E}_r^{(i)} &= \frac{1}{2} ((\mathbf{F}_r^{(i)})^T \mathbf{F}_r^{(i)} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} \left(\left(\Delta_r^{(i)} \tilde{\mathbf{F}}_r^{(i)} \right)^T \left(\Delta_r^{(i)} \tilde{\mathbf{F}}_r^{(i)} \right) - \mathbf{1} \right) = \frac{1}{2} \left((\tilde{\mathbf{F}}_r^{(i)})^T \tilde{\mathbf{F}}_r^{(i)} - \mathbf{1} \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}_p^{(i)} &= \gamma_p^{(i)} \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} + \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} + \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} + \tilde{\mathbf{v}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{v}}^{(i)} \\ \tilde{\mathbf{F}}_r^{(i)} &= \gamma_r^{(i)} \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} + \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} + \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} + \tilde{\mathbf{v}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{v}}^{(i)} \\ (\mathbf{F}_p^{(i)})^{-1} &= -\gamma_p^{(i)} \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)} + \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{s}}^{(i)} + \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)} + \tilde{\mathbf{v}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{v}}^{(i)} \\ (\mathbf{F}_p^{(i)})^{T-1} &= -\gamma_p^{(i)} \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} + \hat{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} + \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} + \hat{\mathbf{v}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{v}}^{(i)} \end{aligned}$$

ergibt sich für $\mathbf{E}_k^{(i)}$

$$\mathbf{E}_k^{(i)} = \frac{\gamma_p^{(i)2} - \gamma_r^{(i)2}}{2} \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} + \frac{\gamma_p^{(i)} - \gamma_r^{(i)}}{2} (\tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} + \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{n}}^{(i)}) \quad .$$

Daraus folgt für $\hat{\Gamma}_k^{(i)}$:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_k^{(i)} &= \mathbf{F}_p^{(i)T-1} \mathbf{E}_k^{(i)} \mathbf{F}_p^{(i)-1} \\ &= \left(-2\gamma_p^{(i)} \frac{\gamma_p^{(i)} - \gamma_r^{(i)}}{2} + \frac{\gamma_p^{(i)2} - \gamma_r^{(i)2}}{2} \right) \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)} + \frac{\gamma_p^{(i)} - \gamma_r^{(i)}}{2} (\hat{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{s}}^{(i)} + \hat{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)}) \\ &= -\frac{\gamma_k^{(i)2}}{2} \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)} + \frac{\gamma_k^{(i)}}{2} (\hat{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{s}}^{(i)} + \hat{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)}) \end{aligned}$$

und somit

$$\boxed{\hat{\Gamma}_k^{(i)} = -\frac{\gamma_k^{(i)2}}{2} \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)} + \frac{\gamma_k^{(i)}}{2} (\hat{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{s}}^{(i)} + \hat{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)})} \quad . \quad (4.61)$$

Kapitel 5

Zusammenfassung des Einkristallmodells

- Basisvektoren des (i)-ten Gleitsystems

$$\hat{\mathbf{s}}^{(i)} = \mathbf{\Phi} \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{n}}^{(i)} = \mathbf{\Phi} \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \quad (5.1)$$

- Spezifische freie Energiefunktion

$$\psi = \tilde{\psi}_e(\tilde{\mathbf{\Gamma}}_e) + \tilde{\psi}_{kin}(\tilde{\mathbf{\Gamma}}_k) + \psi_{iso} \quad (5.2)$$

- Elastizitätsgesetz

$$\psi_e = \tilde{\psi}_e(\tilde{\mathbf{\Gamma}}_e) = \bar{\psi}_e(\hat{\mathbf{\Gamma}}_e, \mathbf{\Phi}) \quad (5.3)$$

$$\hat{\mathbf{T}} = \rho_R \mathbf{\Phi} \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e} \mathbf{\Phi}^T = \rho_R \frac{\partial \bar{\psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{\Gamma}}_e} \quad (5.4)$$

- Plastische Deformationsgeschwindigkeit

$$\hat{\mathbf{L}}_p - \dot{\mathbf{\Phi}} \mathbf{\Phi}^T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \hat{\mathbf{L}}_p^{(i)} - \dot{\mathbf{\Phi}} \mathbf{\Phi}^T \right\} \quad (5.5)$$

$$\hat{\mathbf{L}}_p^{(i)} - \dot{\mathbf{\Phi}} \mathbf{\Phi}^T = \dot{\gamma}_p^{(i)} \hat{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \quad (5.6)$$

$$\hat{\mathbf{D}}_p^{(i)} = \frac{\dot{\gamma}_p^{(i)}}{2} (\hat{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)} + \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{s}}^{(i)}) \quad (5.7)$$

$$\hat{\hat{\mathbf{\Gamma}}}_p = \hat{\mathbf{D}}_p = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_p^{(i)} (\hat{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)} + \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{s}}^{(i)}) \quad (5.8)$$

- Fließregel für Viskoplastizität

$$\dot{\gamma}_p^{(i)} = \frac{\langle |\tau^{(i)} - \xi^{(i)}| - k_0^{(i)} \rangle^{m^{(i)}}}{\eta^{(i)}} \frac{\tau^{(i)} - \xi^{(i)}}{|\tau^{(i)} - \xi^{(i)}|} \quad (5.9)$$

$$\dot{s}^{(i)} = \frac{\langle |\tau^{(i)} - \xi^{(i)}| - k_0^{(i)} \rangle^{m^{(i)}}}{\eta^{(i)}} \geq 0 \quad (5.10)$$

- Kinematische Verfestigung

$$\rho_R \psi_{kin} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \psi_{kin}^{(i)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{\psi}_{kin}^{(i)}(\tilde{\Gamma}_k^{(i)}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{\psi}_{kin}^{(i)}(\hat{\Gamma}_k^{(i)}, \Delta^{(i)}) \quad (5.11)$$

$$\hat{\mathbf{Z}}^{(i)} = \Delta^{(i)} \frac{\partial \tilde{\psi}_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_k^{(i)}} \Delta^{(i)T} = \frac{\partial \bar{\psi}_{kin}^{(i)}}{\partial \hat{\Gamma}_k^{(i)}} \quad (5.12)$$

$$\dot{\gamma}_k^{(i)} = \dot{\gamma}_p^{(i)} - \dot{s}^{(i)} b^{(i)} \left\{ -\gamma_k^{(i)} \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \cdot \hat{\mathbf{Z}}^{(i)} \hat{\mathbf{n}}^{(i)} + \hat{\mathbf{s}}^{(i)} \cdot \hat{\mathbf{Z}}^{(i)} \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \right\} \quad (5.13)$$

$$\hat{\Gamma}_k^{(i)} = -\frac{\gamma_k^{(i)2}}{2} \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)} + \frac{\gamma_k^{(i)}}{2} (\hat{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)} + \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{s}}^{(i)}) \quad (5.14)$$

$$\hat{\xi}^{(i)} = (\mathbf{1} - 2\hat{\Gamma}_k^{(i)})\hat{\mathbf{Z}}^{(i)} \quad (5.15)$$

- Entwicklung der Anisotropieachsen

$$\hat{\Omega}_e = \hat{\mathbf{W}}_p - \dot{\Phi} \Phi^T = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_p^{(i)} (\hat{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)} - \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{s}}^{(i)}) \quad (5.16)$$

(Elastizitätsgesetz)

$$\hat{\Omega}_k^{(i)} = \hat{\mathbf{W}}_p - \dot{\Delta}^{(i)} \Delta^{(i)T} = \hat{\Omega}_e - \lambda_{\Delta}^{(i)} \dot{s}^{(i)} \frac{\partial \hat{\chi}^{(i)}}{\partial \hat{\xi}_A^{(i)}} \quad (5.17)$$

(kinematische Verfestigung)

Kapitel 6

Transformation des Modells auf die Momentankonfiguration

6.1 Transformation der Basisvektoren

Die Basisvektoren $\hat{\mathbf{s}}^{(i)}$ und $\hat{\mathbf{n}}^{(i)}$ der Gleitsysteme in der Zwischenkonfiguration werden mit $\mathbf{F}_e = \mathbf{V}_e \mathbf{R}_e$ auf die Momentankonfiguration transformiert. Für kleine elastische Verzerrungen ($\mathbf{V}_e \approx \mathbf{1}$) gilt dann:

$$\mathbf{s}^{(i)} = \mathbf{F}_e \hat{\mathbf{s}}^{(i)} \approx \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{s}}^{(i)} = (\mathbf{R}_e \Phi) \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} \quad , \quad (6.1)$$

$$\mathbf{n}^{(i)} = \mathbf{F}_e \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \approx \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{n}}^{(i)} = (\mathbf{R}_e \Phi) \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \quad . \quad (6.2)$$

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird der Tensor $\mathbf{R}_e \Phi$ nicht mehr als Multiplikation der beiden Tensoren \mathbf{R}_e und Φ verstanden, sondern als ein Tensor $(\mathbf{R}_e \Phi)$, der Vektoren der Bezugskonfiguration auf Vektoren in der Momentankonfiguration transformiert. Dies soll durch die Klammer $()$ um $\mathbf{R}_e \Phi$ ausgedrückt werden.

6.1.1 Zeitliche Änderung der Basisvektoren

In der Bezugskonfiguration \mathcal{R}_R sind die Basisvektoren $\tilde{\mathbf{s}}^{(i)}$ und $\tilde{\mathbf{n}}^{(i)}$ der Gleitsysteme fest vorgegeben und damit verschwindet ihre zeitliche Änderung:

$$\frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} = 0 \quad . \quad (6.3)$$

In der Momentankonfiguration \mathcal{R}_t gilt aber:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{s}^{(i)} = \frac{d}{dt} \{ (\mathbf{R}_e \Phi) \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} \} = (\mathbf{R}_e \Phi)^\cdot \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} = (\mathbf{R}_e \Phi)^\cdot (\mathbf{R}_e \Phi)^T \mathbf{s}^{(i)} \quad , \quad (6.4)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{n}^{(i)} = \frac{d}{dt} \{ (\mathbf{R}_e \Phi) \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \} = (\mathbf{R}_e \Phi)^\cdot \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} = (\mathbf{R}_e \Phi)^\cdot (\mathbf{R}_e \Phi)^T \mathbf{n}^{(i)} \quad .$$

Hier ergeben sich nun zwei Möglichkeiten, die zeitliche Änderung der Basisvektoren zu berechnen:

- Man geht von den festen unveränderlichen Basisvektoren $\tilde{\mathbf{s}}^{(i)}$ und $\tilde{\mathbf{n}}^{(i)}$ in \mathcal{R}_R aus, berechnet noch $(\mathbf{R}_e \Phi)^\cdot$ und multipliziert beide.

- Man geht von den aktuellen Basisvektoren $\mathbf{s}^{(i)}$ und $\mathbf{n}^{(i)}$ in \mathcal{R}_t aus, berechnet $(\mathbf{R}_e \Phi) \cdot (\mathbf{R}_e \Phi)^T$ und multipliziert beide.
Nachteil: Numerische Ungenauigkeiten in den aktuellen Basisvektoren werden größer.

In dieser Arbeit habe ich mich daher für die erste Methode entschieden und bin immer von den festen Basisvektoren $\tilde{\mathbf{s}}^{(i)}$ und $\tilde{\mathbf{n}}^{(i)}$ in der Bezugskonfiguration ausgegangen und habe $(\mathbf{R}_e \Phi) \cdot$ berechnet.

6.1.2 Herleitung der Gleichungen für $\frac{d}{dt}(\mathbf{R}_e \Phi)$ und $\frac{d}{dt}(\mathbf{R}_e \Delta^{(i)})$

Man beginnt mit dem elastischen Anteil des plastischen Spins in der Zwischenkonfiguration:

$$\hat{\Omega}_e = \hat{\mathbf{W}}_p - \dot{\Phi} \Phi^T = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_p^{(i)} (\hat{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)} - \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{s}}^{(i)})$$

und formt diesen um zu:

$$\dot{\Phi} \Phi^T = \hat{\mathbf{W}}_p - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_p^{(i)} (\hat{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)} - \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{s}}^{(i)}) \quad . \quad (6.5)$$

Jetzt kann $(\mathbf{R}_e \Phi) \cdot (\mathbf{R}_e \Phi)^T$ ausmultipliziert werden:

$$(\mathbf{R}_e \Phi) \cdot (\mathbf{R}_e \Phi)^T = (\mathbf{R}_e) \cdot \underbrace{\Phi \Phi^T}_1 \mathbf{R}_e^T + \mathbf{R}_e \left(\dot{\Phi} \Phi^T \right) \mathbf{R}_e^T \quad (6.6)$$

Für $\dot{\Phi} \Phi^T$ setzt man obige Beziehung ein und erhält:

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_e \Phi) \cdot (\mathbf{R}_e \Phi)^T &= (\mathbf{R}_e) \cdot (\mathbf{R}_e)^T + \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{W}}_p \mathbf{R}_e^T \\ &\quad - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_p^{(i)} (\mathbf{s}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} - \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{s}^{(i)}) \quad . \end{aligned} \quad (6.7)$$

Nun ist noch die Identität

$$(\mathbf{R}_e) \cdot (\mathbf{R}_e)^T + \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{W}}_p \mathbf{R}_e^T = \mathbf{W}$$

zu zeigen:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) = \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} - \left(\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \right)^T \right) = \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} - \mathbf{F}^{T-1} \dot{\mathbf{F}}^T \right) \\ &= \frac{1}{2} \left((\mathbf{F}_e \mathbf{F}_p) \cdot (\mathbf{F}_e \mathbf{F}_p)^{-1} - (\mathbf{F}_e \mathbf{F}_p)^{T-1} ((\mathbf{F}_e \mathbf{F}_p) \cdot)^T \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{F}}_e \mathbf{F}_p \mathbf{F}_p^{-1} \mathbf{F}_e^{-1} + \mathbf{F}_e \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1} \mathbf{F}_e^{-1} - (\mathbf{F}_e^{T-1} \mathbf{F}_p^{T-1}) \left(\mathbf{F}_p^T \dot{\mathbf{F}}_e^T + \dot{\mathbf{F}}_p^T \mathbf{F}_e^T \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{F}}_e \mathbf{F}_e^{-1} + \mathbf{F}_e \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1} \mathbf{F}_e^{-1} - \mathbf{F}_e^{T-1} \dot{\mathbf{F}}_e^T - \mathbf{F}_e^{T-1} \mathbf{F}_p^{T-1} \dot{\mathbf{F}}_p^T \mathbf{F}_e^T \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{F}}_e \mathbf{F}_e^{-1} - \left(\dot{\mathbf{F}}_e \mathbf{F}_e^{-1} \right)^T + \mathbf{F}_e \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1} \mathbf{F}_e^{-1} - \left(\mathbf{F}_e \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1} \mathbf{F}_e^{-1} \right)^T \right) \end{aligned}$$

Mit der polaren Zerlegung $\mathbf{F}_e = \mathbf{V}_e \mathbf{R}_e$ und der Annahme kleiner elastischer Verzerrungen ($\mathbf{V}_e \approx \mathbf{1}$) vereinfacht sich die letzte Umformung zu:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{R}}_e \mathbf{R}_e^{-1} - \left(\dot{\mathbf{R}}_e \mathbf{R}_e^{-1} \right)^T + \mathbf{R}_e \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1} \mathbf{R}_e^{-1} - \left(\mathbf{R}_e \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1} \mathbf{R}_e^{-1} \right)^T \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{R}}_e \mathbf{R}_e^{-1} - \left(\dot{\mathbf{R}}_e \mathbf{R}_e^{-1} \right)^T + \mathbf{R}_e \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1} \mathbf{R}_e^{-1} - \mathbf{R}_e \left(\dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1} \right)^T \mathbf{R}_e^T \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{R}}_e \mathbf{R}_e^T - \mathbf{R}_e \dot{\mathbf{R}}_e^T + \mathbf{R}_e \left\{ \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1} - \left(\dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1} \right)^T \right\} \mathbf{R}_e^T \right) . \end{aligned}$$

Aus $\mathbf{R}_e \mathbf{R}_e^T = \mathbf{1}$ folgt

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{R}_e \mathbf{R}_e^T) = \dot{\mathbf{R}}_e \mathbf{R}_e^T + \mathbf{R}_e \dot{\mathbf{R}}_e^T = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_e \dot{\mathbf{R}}_e^T = -\dot{\mathbf{R}}_e \mathbf{R}_e^T$$

und damit

$$\mathbf{W} = \dot{\mathbf{R}}_e \mathbf{R}_e^T + \mathbf{R}_e \underbrace{\left\{ \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1} - \left(\dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1} \right)^T \right) \right\}}_{\hat{\mathbf{W}}_p} \mathbf{R}_e^T . \quad (6.8)$$

Damit ist die Identität

$$\mathbf{W} = \dot{\mathbf{R}}_e \mathbf{R}_e^T + \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{W}}_p \mathbf{R}_e^T \quad (6.9)$$

gezeigt.

Die endgültige Gleichung für $(\mathbf{R}_e \Phi)^\cdot (\mathbf{R}_e \Phi)^T$ lautet nun:

$$\boxed{(\mathbf{R}_e \Phi)^\cdot (\mathbf{R}_e \Phi)^T = \mathbf{W} - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_p^{(i)} (\mathbf{s}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} - \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{s}^{(i)})} \quad (6.10)$$

und für $(\mathbf{R}_e \Phi)^\cdot$:

$$\boxed{(\mathbf{R}_e \Phi)^\cdot = \left\{ \mathbf{W} - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_p^{(i)} (\mathbf{s}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} - \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{s}^{(i)}) \right\} (\mathbf{R}_e \Phi)} . \quad (6.11)$$

Mit analogen Überlegungen kann man aus

$$\hat{\Omega}_k^{(i)} = \hat{\mathbf{W}}_p - \dot{\Delta}^{(i)} \Delta^{(i)T} = \hat{\Omega}_e - \lambda_\Delta^{(i)} \dot{s}^{(i)} \frac{\partial \hat{\chi}^{(i)}}{\partial \hat{\xi}_A^{(i)}}$$

eine Gleichung für $(\mathbf{R}_e \Delta^{(i)})^\cdot$ gewinnen:

$$\boxed{(\mathbf{R}_e \Delta^{(i)})^\cdot = \left\{ \mathbf{W} - \frac{1}{2n} \sum_{a=1}^n \dot{\gamma}_p^{(a)} (\mathbf{s}^{(a)} \otimes \mathbf{n}^{(a)} - \mathbf{n}^{(a)} \otimes \mathbf{s}^{(a)}) + \lambda_\Delta^{(i)} \dot{s}^{(i)} \left(\Gamma_k^{(i)} \mathbf{Z}^{(i)} - \mathbf{Z}^{(i)} \Gamma_k^{(i)} \right) \right\} (\mathbf{R}_e \Delta^{(i)})} \quad (6.12)$$

Hierzu wurde für die konvexe Funktion $\hat{\chi}^{(i)}$ die einfache Möglichkeit

$$\hat{\chi}^{(i)} \left(\hat{\xi}_A^{(i)} \right) = \frac{1}{2} \left(\hat{\xi}_A^{(i)} \right)^2 \quad (6.13)$$

gewählt.

6.2 Transformation des Modells auf die Momentan-konfiguration

1. Vorgabe des Deformationsgradienten \mathbf{F}

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \quad . \quad (6.14)$$

2. Almansischer Verzerrungstensor

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{1} - (\mathbf{F}\mathbf{F}^T)^{-1} \right) \quad , \quad (6.15)$$

$$\mathbf{A}_e = \mathbf{A} - \mathbf{A}_p \quad . \quad (6.16)$$

3. Elastizitätsgesetz

$$\hat{\mathbf{T}} = \rho_R \mathbf{\Phi} \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\mathbf{\Gamma}}_e)}{\partial \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e} \mathbf{\Phi}^T = \rho_R \frac{\partial \bar{\Psi}_e(\hat{\mathbf{\Gamma}}_e, \mathbf{\Phi})}{\partial \hat{\mathbf{\Gamma}}_e} \quad , \quad \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e = \mathbf{\Phi}^T \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \mathbf{\Phi} \quad . \quad (6.17)$$

Als Ansatz für das Potential $\rho_R \bar{\Psi}_e(\hat{\mathbf{\Gamma}}_e, \mathbf{\Phi})$ wird für kubische Symmetrie gewählt (siehe Kapitel 2.2):

$$\rho_R \bar{\Psi}_e(\hat{\mathbf{\Gamma}}_e, \mathbf{\Phi}) = \frac{1}{2} C_1^e I_1^e + C_2^e I_2^e + C_3^e I_3^e \quad (6.18)$$

mit

$$\mathbf{X}^e := \mathbf{\Phi}^T \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \mathbf{\Phi} = \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e \quad (6.19)$$

$$I_1^e = \{\mathbf{X}_{11}^e\}^2 + \{\mathbf{X}_{22}^e\}^2 + \{\mathbf{X}_{33}^e\}^2 \quad (6.20)$$

$$I_2^e = \mathbf{X}_{11}^e \mathbf{X}_{22}^e + \mathbf{X}_{22}^e \mathbf{X}_{33}^e + \mathbf{X}_{33}^e \mathbf{X}_{11}^e \quad (6.21)$$

$$I_3^e = \{\mathbf{X}_{12}^e\}^2 + \{\mathbf{X}_{13}^e\}^2 + \{\mathbf{X}_{23}^e\}^2 \quad . \quad (6.22)$$

Mit der Definition

$$\hat{\mathbf{M}}_{ij}^e := (\mathbf{\Phi} \tilde{\mathbf{e}}_i) \otimes (\mathbf{\Phi} \tilde{\mathbf{e}}_j) \quad (6.23)$$

und

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{\mathbf{e}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

können die Invarianten $I_1^e - I_3^e$ umgeschrieben werden zu

$$\begin{aligned} I_1^e &= \left(\hat{\mathbf{\Gamma}}_e \cdot \hat{\mathbf{M}}_{11}^e \right)^2 + \left(\hat{\mathbf{\Gamma}}_e \cdot \hat{\mathbf{M}}_{22}^e \right)^2 + \left(\hat{\mathbf{\Gamma}}_e \cdot \hat{\mathbf{M}}_{33}^e \right)^2 \\ I_2^e &= \left(\hat{\mathbf{\Gamma}}_e \cdot \hat{\mathbf{M}}_{11}^e \right) \left(\hat{\mathbf{\Gamma}}_e \cdot \hat{\mathbf{M}}_{22}^e \right) + \left(\hat{\mathbf{\Gamma}}_e \cdot \hat{\mathbf{M}}_{22}^e \right) \left(\hat{\mathbf{\Gamma}}_e \cdot \hat{\mathbf{M}}_{33}^e \right) + \left(\hat{\mathbf{\Gamma}}_e \cdot \hat{\mathbf{M}}_{33}^e \right) \left(\hat{\mathbf{\Gamma}}_e \cdot \hat{\mathbf{M}}_{11}^e \right) \\ I_3^e &= \left(\hat{\mathbf{\Gamma}}_e \cdot \hat{\mathbf{M}}_{12}^e \right)^2 + \left(\hat{\mathbf{\Gamma}}_e \cdot \hat{\mathbf{M}}_{13}^e \right)^2 + \left(\hat{\mathbf{\Gamma}}_e \cdot \hat{\mathbf{M}}_{23}^e \right)^2 \quad . \end{aligned} \quad (6.25)$$

Berechnung von $\frac{\partial \bar{\Psi}_e(\hat{\Gamma}_e, \hat{\mathbf{M}}_{ij}^e)}{\partial \hat{\Gamma}_e} = \frac{1}{2} C_1^e \frac{\partial I_1^e}{\partial \hat{\Gamma}_e} + C_2^e \frac{\partial I_2^e}{\partial \hat{\Gamma}_e} + C_3^e \frac{\partial I_3^e}{\partial \hat{\Gamma}_e} :$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_1^e}{\partial \hat{\Gamma}_e} &= 2 \left\{ \left(\hat{\Gamma}_e \cdot \hat{\mathbf{M}}_{11}^e \right) \hat{\mathbf{M}}_{11}^e + \left(\hat{\Gamma}_e \cdot \hat{\mathbf{M}}_{22}^e \right) \hat{\mathbf{M}}_{22}^e + \left(\hat{\Gamma}_e \cdot \hat{\mathbf{M}}_{33}^e \right) \hat{\mathbf{M}}_{33}^e \right\} \\
\frac{\partial I_2^e}{\partial \hat{\Gamma}_e} &= \hat{\mathbf{M}}_{11}^e \left(\hat{\Gamma}_e \cdot \hat{\mathbf{M}}_{22}^e \right) + \left(\hat{\Gamma}_e \cdot \hat{\mathbf{M}}_{11}^e \right) \hat{\mathbf{M}}_{22}^e + \hat{\mathbf{M}}_{22}^e \left(\hat{\Gamma}_e \cdot \hat{\mathbf{M}}_{33}^e \right) \\
&\quad + \left(\hat{\Gamma}_e \cdot \hat{\mathbf{M}}_{22}^e \right) \hat{\mathbf{M}}_{33}^e + \hat{\mathbf{M}}_{33}^e \left(\hat{\Gamma}_e \cdot \hat{\mathbf{M}}_{11}^e \right) + \left(\hat{\Gamma}_e \cdot \hat{\mathbf{M}}_{33}^e \right) \hat{\mathbf{M}}_{11}^e \\
\frac{\partial I_3^e}{\partial \hat{\Gamma}_e} &= \left(\hat{\Gamma}_e \cdot \hat{\mathbf{M}}_{12}^e \right) \hat{\mathbf{M}}_{12}^e + \left(\hat{\Gamma}_e \cdot \hat{\mathbf{M}}_{21}^e \right) \hat{\mathbf{M}}_{21}^e + \left(\hat{\Gamma}_e \cdot \hat{\mathbf{M}}_{13}^e \right) \hat{\mathbf{M}}_{13}^e + \\
&\quad \left(\hat{\Gamma}_e \cdot \hat{\mathbf{M}}_{31}^e \right) \hat{\mathbf{M}}_{31}^e + \left(\hat{\Gamma}_e \cdot \hat{\mathbf{M}}_{23}^e \right) \hat{\mathbf{M}}_{23}^e + \left(\hat{\Gamma}_e \cdot \hat{\mathbf{M}}_{32}^e \right) \hat{\mathbf{M}}_{32}^e .
\end{aligned} \tag{6.26}$$

Dies kann nun mit

$$\hat{\Gamma}_e = \mathbf{F}_e^T \mathbf{A}_e \mathbf{F}_e = \mathbf{R}_e^T \mathbf{V}_e \mathbf{A}_e \mathbf{V}_e \mathbf{R}_e \tag{6.27}$$

und

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}_e \hat{\mathbf{T}} \mathbf{F}_e^T = \rho_R \mathbf{F}_e \frac{\partial \bar{\Psi}_e}{\partial \hat{\Gamma}_e} \mathbf{F}_e^T = \rho_R \mathbf{V}_e \mathbf{R}_e \frac{\partial \bar{\Psi}_e}{\partial \hat{\Gamma}_e} \mathbf{R}_e^T \mathbf{V}_e \tag{6.28}$$

auf die Momentankonfiguration transformiert werden.

Unter der Annahme kleiner elastischer Verzerrungen ($\mathbf{V}_e \approx \mathbf{1}$) folgt für das auf die Momentankonfiguration transformierte orthotrope Elastizitätsgesetz

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} &= C_1^e \{ (\mathbf{A}_e \cdot \mathbf{M}_{11}^e) \mathbf{M}_{11}^e + (\mathbf{A}_e \cdot \mathbf{M}_{22}^e) \mathbf{M}_{22}^e + (\mathbf{A}_e \cdot \mathbf{M}_{33}^e) \mathbf{M}_{33}^e \} \\
&+ C_2^e \{ \mathbf{M}_{11}^e (\mathbf{A}_e \cdot \mathbf{M}_{22}^e) + (\mathbf{A}_e \cdot \mathbf{M}_{11}^e) \mathbf{M}_{22}^e + \\
&\quad \mathbf{M}_{22}^e (\mathbf{A}_e \cdot \mathbf{M}_{33}^e) + (\mathbf{A}_e \cdot \mathbf{M}_{22}^e) \mathbf{M}_{33}^e + \\
&\quad \mathbf{M}_{33}^e (\mathbf{A}_e \cdot \mathbf{M}_{11}^e) + (\mathbf{A}_e \cdot \mathbf{M}_{33}^e) \mathbf{M}_{11}^e \} \\
&+ C_3^e \{ \mathbf{M}_{12}^e (\mathbf{A}_e \cdot \mathbf{M}_{12}^e) + (\mathbf{A}_e \cdot \mathbf{M}_{21}^e) \mathbf{M}_{21}^e + \\
&\quad \mathbf{M}_{23}^e (\mathbf{A}_e \cdot \mathbf{M}_{23}^e) + (\mathbf{A}_e \cdot \mathbf{M}_{32}^e) \mathbf{M}_{32}^e + \\
&\quad \mathbf{M}_{31}^e (\mathbf{A}_e \cdot \mathbf{M}_{31}^e) + (\mathbf{A}_e \cdot \mathbf{M}_{13}^e) \mathbf{M}_{13}^e \} .
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Dabei sind die Strukturtenoren im Elastizitätsgesetz

$$\mathbf{M}_{ij}^e := (\mathbf{R}_e \Phi) \tilde{\mathbf{e}}_i \otimes (\mathbf{R}_e \Phi) \tilde{\mathbf{e}}_j . \tag{6.30}$$

4. Kinematische Verfestigung

$$\hat{\Gamma}_k^{(i)} = -\frac{\gamma_k^{(i)^2}}{2} \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)} + \frac{\gamma_k^{(i)}}{2} (\hat{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)} + \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{s}}^{(i)}) .$$

Die thermodynamisch konjugierte Spannung zu $\hat{\Gamma}_k^{(i)}$ ist:

$$\hat{\mathbf{Z}}^{(i)} = \Delta^{(i)} \frac{\partial \tilde{\Psi}_{kin}(\tilde{\Gamma}_k^{(i)})}{\partial \tilde{\Gamma}_k^{(i)}} \Delta^{(i)T} = \frac{\partial \bar{\Psi}_{kin}(\hat{\Gamma}_k^{(i)}, \Delta^{(i)})}{\partial \hat{\Gamma}_k^{(i)}} , \quad \tilde{\Gamma}_k^{(i)} = \Delta^{(i)T} \hat{\Gamma}_k^{(i)} \Delta^{(i)} .$$

Annahme: $\overline{\Psi}_{kin} \left(\hat{\Gamma}_k^{(i)}, \Delta^{(i)} \right)$ lautet analog zum Elastizitätsgesetz:

$$\overline{\Psi}_{kin} \left(\hat{\Gamma}_k^{(i)}, \Delta^{(i)} \right) = \frac{1}{2} C_1^k I_1^k + C_2^k I_2^k + C_3^k I_3^k \quad (6.31)$$

mit

$$\mathbf{X}^k := \Delta^{(i)T} \hat{\Gamma}_k^{(i)} \Delta^{(i)} = \tilde{\Gamma}_k^{(i)} \quad (6.32)$$

$$I_1^k = \{ \mathbf{X}_{11}^k \}^2 + \{ \mathbf{X}_{22}^k \}^2 + \{ \mathbf{X}_{33}^k \}^2 \quad (6.33)$$

$$I_2^k = \mathbf{X}_{11}^k \mathbf{X}_{22}^k + \mathbf{X}_{22}^k \mathbf{X}_{33}^k + \mathbf{X}_{33}^k \mathbf{X}_{11}^k \quad (6.34)$$

$$I_3^k = \{ \mathbf{X}_{12}^k \}^2 + \{ \mathbf{X}_{13}^k \}^2 + \{ \mathbf{X}_{23}^k \}^2 \quad (6.35)$$

Mit der Definition

$$\left(\hat{\mathbf{M}}_{rs}^k \right)^{(i)} := \left(\Delta^{(i)} \tilde{\mathbf{e}}_r \right) \otimes \left(\Delta^{(i)} \tilde{\mathbf{e}}_s \right) \quad (6.36)$$

können die Invarianten $I_1^k - I_3^k$ umgeschrieben werden zu

$$\begin{aligned} I_1^k &= \left(\hat{\Gamma}_k^{(i)} \cdot \left(\hat{\mathbf{M}}_{11}^k \right)^{(i)} \right)^2 + \left(\hat{\Gamma}_k^{(i)} \cdot \left(\hat{\mathbf{M}}_{22}^k \right)^{(i)} \right)^2 + \left(\hat{\Gamma}_k^{(i)} \cdot \left(\hat{\mathbf{M}}_{33}^k \right)^{(i)} \right)^2 \\ I_2^k &= \left(\hat{\Gamma}_k^{(i)} \cdot \left(\hat{\mathbf{M}}_{11}^k \right)^{(i)} \right) \left(\hat{\Gamma}_k^{(i)} \cdot \left(\hat{\mathbf{M}}_{22}^k \right)^{(i)} \right) + \left(\hat{\Gamma}_k^{(i)} \cdot \left(\hat{\mathbf{M}}_{22}^k \right)^{(i)} \right) \left(\hat{\Gamma}_k^{(i)} \cdot \left(\hat{\mathbf{M}}_{33}^k \right)^{(i)} \right) + \\ &\quad \left(\hat{\Gamma}_k^{(i)} \cdot \left(\hat{\mathbf{M}}_{33}^k \right)^{(i)} \right) \left(\hat{\Gamma}_k^{(i)} \cdot \left(\hat{\mathbf{M}}_{11}^k \right)^{(i)} \right) \\ I_3^k &= \left(\hat{\Gamma}_k^{(i)} \cdot \left(\hat{\mathbf{M}}_{12}^k \right)^{(i)} \right)^2 + \left(\hat{\Gamma}_k^{(i)} \cdot \left(\hat{\mathbf{M}}_{13}^k \right)^{(i)} \right)^2 + \left(\hat{\Gamma}_k^{(i)} \cdot \left(\hat{\mathbf{M}}_{23}^k \right)^{(i)} \right)^2 \end{aligned} \quad (6.37)$$

Berechnung von $\frac{\partial \overline{\Psi}_{kin} \left(\hat{\Gamma}_k^{(i)}, \left(\hat{\mathbf{M}}_{rs}^k \right)^{(i)} \right)}{\partial \hat{\Gamma}_k^{(i)}} = \frac{1}{2} C_1^k \frac{\partial I_1^k}{\partial \hat{\Gamma}_k^{(i)}} + C_2^k \frac{\partial I_2^k}{\partial \hat{\Gamma}_k^{(i)}} + C_3^k \frac{\partial I_3^k}{\partial \hat{\Gamma}_k^{(i)}} :$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1^k}{\partial \hat{\Gamma}_k^{(i)}} &= 2 \left\{ \left(\hat{\Gamma}_k^{(i)} \cdot \left(\hat{\mathbf{M}}_{11}^k \right)^{(i)} \right) \left(\hat{\mathbf{M}}_{11}^k \right)^{(i)} + \left(\hat{\Gamma}_k^{(i)} \cdot \left(\hat{\mathbf{M}}_{22}^k \right)^{(i)} \right) \left(\hat{\mathbf{M}}_{22}^k \right)^{(i)} + \right. \\ &\quad \left. \left(\hat{\Gamma}_k^{(i)} \cdot \left(\hat{\mathbf{M}}_{33}^k \right)^{(i)} \right) \left(\hat{\mathbf{M}}_{33}^k \right)^{(i)} \right\} \end{aligned} \quad (6.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_2^k}{\partial \hat{\Gamma}_k^{(i)}} &= \left(\hat{\mathbf{M}}_{11}^k \right)^{(i)} \left(\hat{\Gamma}_k^{(i)} \cdot \left(\hat{\mathbf{M}}_{22}^k \right)^{(i)} \right) + \left(\hat{\Gamma}_k^{(i)} \cdot \left(\hat{\mathbf{M}}_{11}^k \right)^{(i)} \right) \left(\hat{\mathbf{M}}_{22}^k \right)^{(i)} + \\ &\quad \left(\hat{\mathbf{M}}_{22}^k \right)^{(i)} \left(\hat{\Gamma}_k^{(i)} \cdot \left(\hat{\mathbf{M}}_{33}^k \right)^{(i)} \right) + \left(\hat{\Gamma}_k^{(i)} \cdot \left(\hat{\mathbf{M}}_{22}^k \right)^{(i)} \right) \left(\hat{\mathbf{M}}_{33}^k \right)^{(i)} + \\ &\quad \left(\hat{\mathbf{M}}_{33}^k \right)^{(i)} \left(\hat{\Gamma}_k^{(i)} \cdot \left(\hat{\mathbf{M}}_{11}^k \right)^{(i)} \right) + \left(\hat{\Gamma}_k^{(i)} \cdot \left(\hat{\mathbf{M}}_{33}^k \right)^{(i)} \right) \left(\hat{\mathbf{M}}_{11}^k \right)^{(i)} \end{aligned} \quad (6.39)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_3^k}{\partial \hat{\Gamma}_k^{(i)}} = & \left(\hat{\Gamma}_k^{(i)} \cdot (\hat{\mathbf{M}}_{12}^k)^{(i)} \right) (\hat{\mathbf{M}}_{12}^k)^{(i)} + \left(\hat{\Gamma}_k^{(i)} \cdot (\hat{\mathbf{M}}_{21}^k)^{(i)} \right) (\hat{\mathbf{M}}_{21}^k)^{(i)} + \\
& \left(\hat{\Gamma}_k^{(i)} \cdot (\hat{\mathbf{M}}_{13}^k)^{(i)} \right) (\hat{\mathbf{M}}_{13}^k)^{(i)} + \left(\hat{\Gamma}_k^{(i)} \cdot (\hat{\mathbf{M}}_{31}^k)^{(i)} \right) (\hat{\mathbf{M}}_{31}^k)^{(i)} + \\
& \left(\hat{\Gamma}_k^{(i)} \cdot (\hat{\mathbf{M}}_{23}^k)^{(i)} \right) (\hat{\mathbf{M}}_{23}^k)^{(i)} + \left(\hat{\Gamma}_k^{(i)} \cdot (\hat{\mathbf{M}}_{32}^k)^{(i)} \right) (\hat{\mathbf{M}}_{32}^k)^{(i)} .
\end{aligned} \tag{6.40}$$

Da $\hat{\Gamma}_k^{(i)}$ die Struktur eines Dehnungstensors in der Zwischenkonfiguration besitzt, kann er durch

$$\hat{\Gamma}_k^{(i)} = \mathbf{F}_e^T \Gamma_k^{(i)} \mathbf{F}_e = \mathbf{R}_e^T \mathbf{V}_e \Gamma_k^{(i)} \mathbf{V}_e \mathbf{R}_e \tag{6.41}$$

auf die Momentankonfiguration transformiert werden.

Der Spannungstensor der kinematischen Verfestigung transformiert sich durch

$$\mathbf{Z}^{(i)} = \mathbf{F}_e \hat{\mathbf{Z}}^{(i)} \mathbf{F}_e^T = \rho_R \mathbf{F}_e \frac{\partial \bar{\Psi}_{kin}}{\partial \hat{\Gamma}_k^{(i)}} \mathbf{F}_e^T = \rho_R \mathbf{V}_e \mathbf{R}_e \frac{\partial \bar{\Psi}_{kin}}{\partial \Gamma_k^{(i)}} \mathbf{R}_e^T \mathbf{V}_e \tag{6.42}$$

auf die Momentankonfiguration.

Unter der Annahme kleiner elastischer Verzerrungen ($\mathbf{V}_e \approx \mathbf{1}$) folgt

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}^{(i)} = & C_1^k \left\{ \left(\Gamma_k^{(i)} \cdot (\mathbf{M}_{11}^k)^{(i)} \right) (\mathbf{M}_{11}^k)^{(i)} + \left(\Gamma_k^{(i)} \cdot (\mathbf{M}_{22}^k)^{(i)} \right) (\mathbf{M}_{22}^k)^{(i)} + \right. \\
& \left. \left(\Gamma_k^{(i)} \cdot (\mathbf{M}_{33}^k)^{(i)} \right) (\mathbf{M}_{33}^k)^{(i)} \right\} \\
+ & C_2^k \left\{ (\mathbf{M}_{11}^k)^{(i)} \left(\Gamma_k^{(i)} \cdot (\mathbf{M}_{22}^k)^{(i)} \right) + \left(\Gamma_k^{(i)} \cdot (\mathbf{M}_{11}^k)^{(i)} \right) (\mathbf{M}_{22}^k)^{(i)} + \right. \\
& (\mathbf{M}_{22}^k)^{(i)} \left(\Gamma_k^{(i)} \cdot (\mathbf{M}_{33}^k)^{(i)} \right) + \left(\Gamma_k^{(i)} \cdot (\mathbf{M}_{22}^k)^{(i)} \right) (\mathbf{M}_{33}^k)^{(i)} + \\
& (\mathbf{M}_{33}^k)^{(i)} \left(\Gamma_k^{(i)} \cdot (\mathbf{M}_{11}^k)^{(i)} \right) + \left(\Gamma_k^{(i)} \cdot (\mathbf{M}_{33}^k)^{(i)} \right) (\mathbf{M}_{11}^k)^{(i)} \left. \right\} \\
+ & C_3^k \left\{ \left(\Gamma_k^{(i)} \cdot (\mathbf{M}_{12}^k)^{(i)} \right) (\mathbf{M}_{12}^k)^{(i)} + \left(\Gamma_k^{(i)} \cdot (\mathbf{M}_{21}^k)^{(i)} \right) (\mathbf{M}_{21}^k)^{(i)} + \right. \\
& \left(\hat{\Gamma}_k^{(i)} \cdot (\mathbf{M}_{13}^k)^{(i)} \right) (\mathbf{M}_{13}^k)^{(i)} + \left(\Gamma_k^{(i)} \cdot (\mathbf{M}_{31}^k)^{(i)} \right) (\mathbf{M}_{31}^k)^{(i)} + \\
& \left(\Gamma_k^{(i)} \cdot (\mathbf{M}_{23}^k)^{(i)} \right) (\mathbf{M}_{23}^k)^{(i)} + \left(\Gamma_k^{(i)} \cdot (\mathbf{M}_{32}^k)^{(i)} \right) (\mathbf{M}_{32}^k)^{(i)} \left. \right\} .
\end{aligned} \tag{6.43}$$

Dabei sind die Strukturtenoren in der kinematischen Verfestigung

$$(\mathbf{M}_{rs}^k)^{(i)} := (\mathbf{R}_e \boldsymbol{\Delta}^{(i)}) \tilde{\mathbf{e}}_r \otimes (\mathbf{R}_e \boldsymbol{\Delta}^{(i)}) \tilde{\mathbf{e}}_s . \tag{6.44}$$

5. Schmidtsche Spannung im $^{(i)}$ -ten Gleitsystem

$$\tau^{(i)} := \mathbf{s}^{(i)} \cdot \mathbf{S} [\mathbf{n}^{(i)}] . \tag{6.45}$$

6. Skalare kinematische Verfestigung im $^{(i)}$ -ten Gleitsystem

$$\xi^{(i)} := \mathbf{s}^{(i)} \cdot \left\{ \mathbf{Z}^{(i)} - 2 \Gamma_k^{(i)} \mathbf{Z}^{(i)} \right\} [\mathbf{n}^{(i)}] . \tag{6.46}$$

7. Viskoplastisches Fließgesetz

$$\dot{\mathbf{s}}^{(i)} = \frac{\left\langle |\tau^{(i)} - \xi^{(i)}| - k_0^{(i)} \right\rangle^{m^{(i)}}}{\eta^{(i)}} \quad , \quad (6.47)$$

$$\dot{\gamma}_p^{(i)} = \frac{(\tau^{(i)} - \xi^{(i)})}{|\tau^{(i)} - \xi^{(i)}|} \cdot \dot{\mathbf{s}}^{(i)} \quad . \quad (6.48)$$

8. Evolutionsgleichung für $\dot{\gamma}_k^{(i)}$

$$\dot{\gamma}_k^{(i)} = \dot{\gamma}_p^{(i)} - \dot{\mathbf{s}}^{(i)} b^{(i)} \left\{ -\gamma_k^{(i)} \mathbf{n}^{(i)} \cdot \mathbf{Z}^{(i)} [\mathbf{n}^{(i)}] + \mathbf{s}^{(i)} \cdot \mathbf{Z}^{(i)} [\mathbf{n}^{(i)}] \right\} \quad . \quad (6.49)$$

9. Evolutionsgleichungen für die Drehtensoren $(\mathbf{R}_e \Phi)$ und $(\mathbf{R}_e \Delta^{(i)})$

$$\mathbf{K} := \mathbf{W} - \frac{1}{2n} \sum_{a=1}^n \dot{\gamma}_p^{(a)} (\mathbf{s}^{(a)} \otimes \mathbf{n}^{(a)} - \mathbf{n}^{(a)} \otimes \mathbf{s}^{(a)}) \quad , \quad (6.50)$$

$$(\mathbf{R}_e \Phi)^{\cdot} = \mathbf{K} (\mathbf{R}_e \Phi) \quad , \quad (6.51)$$

$$(\mathbf{R}_e \Delta^{(i)})^{\cdot} = \left\{ \mathbf{K} + \lambda_{\Delta}^{(i)} \dot{\mathbf{s}}^{(i)} \left(\Gamma_k^{(i)} \mathbf{Z}^{(i)} - \mathbf{Z}^{(i)} \Gamma_k^{(i)} \right) \right\} (\mathbf{R}_e \Delta^{(i)}) \quad . \quad (6.52)$$

10. Evolution von \mathbf{A}_p

Ausgehend von

$$\overset{\Delta}{\hat{\Gamma}}_p = \hat{\mathbf{D}}_p = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_p^{(i)} (\hat{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)} + \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{s}}^{(i)})$$

wird $\overset{\Delta}{\hat{\Gamma}}_p$ auf die Momentankonfiguration transformiert:

$$\overset{\Delta}{\mathbf{A}}_p = \mathbf{F}_e^{T-1} \overset{\Delta}{\hat{\Gamma}}_p \mathbf{F}_e^{-1} = \mathbf{V}_e^{T-1} \mathbf{R}_e^{T-1} \overset{\Delta}{\hat{\Gamma}}_p \mathbf{R}_e^{-1} \mathbf{V}_e^{-1} \quad .$$

Unter der Annahme kleiner elastischer Verzerrungen ($\mathbf{V}_e \approx \mathbf{1}$) ergibt sich

$$\overset{\Delta}{\mathbf{A}}_p = \mathbf{R}_e \overset{\Delta}{\hat{\Gamma}}_p \mathbf{R}_e^{-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_p^{(i)} (\mathbf{s}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} + \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{s}^{(i)}) \quad . \quad (6.53)$$

11. Evolution der Basisvektoren

$$\mathbf{s}^{(i)} = (\mathbf{R}_e \Phi) \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} \quad , \quad (6.54)$$

$$\mathbf{n}^{(i)} = (\mathbf{R}_e \Phi) \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \quad . \quad (6.55)$$

Kapitel 7

Zusammenfassung der Gleichungen für kubische Symmetrie

- Almansischer Verzerrungstensor

$$\mathbf{A}_e = \mathbf{A} - \mathbf{A}_p \quad . \quad (7.1)$$

- Elastizitätsgesetz

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & C_1^e \{ (\mathbf{A}_e \cdot \mathbf{M}_{11}^e) \mathbf{M}_{11}^e + (\mathbf{A}_e \cdot \mathbf{M}_{22}^e) \mathbf{M}_{22}^e + (\mathbf{A}_e \cdot \mathbf{M}_{33}^e) \mathbf{M}_{33}^e \} \\ & + C_2^e \{ \mathbf{M}_{11}^e (\mathbf{A}_e \cdot \mathbf{M}_{22}^e) + (\mathbf{A}_e \cdot \mathbf{M}_{11}^e) \mathbf{M}_{22}^e + \\ & \quad \mathbf{M}_{22}^e (\mathbf{A}_e \cdot \mathbf{M}_{33}^e) + (\mathbf{A}_e \cdot \mathbf{M}_{22}^e) \mathbf{M}_{33}^e + \\ & \quad \mathbf{M}_{33}^e (\mathbf{A}_e \cdot \mathbf{M}_{11}^e) + (\mathbf{A}_e \cdot \mathbf{M}_{33}^e) \mathbf{M}_{11}^e \} \\ & + C_3^e \{ \mathbf{M}_{12}^e (\mathbf{A}_e \cdot \mathbf{M}_{12}^e) + (\mathbf{A}_e \cdot \mathbf{M}_{21}^e) \mathbf{M}_{21}^e + \\ & \quad \mathbf{M}_{23}^e (\mathbf{A}_e \cdot \mathbf{M}_{23}^e) + (\mathbf{A}_e \cdot \mathbf{M}_{32}^e) \mathbf{M}_{32}^e + \\ & \quad \mathbf{M}_{31}^e (\mathbf{A}_e \cdot \mathbf{M}_{31}^e) + (\mathbf{A}_e \cdot \mathbf{M}_{13}^e) \mathbf{M}_{13}^e \} \quad . \end{aligned} \quad (7.2)$$

Dabei lauten die Strukturtenoren im Elastizitätsgesetz

$$\mathbf{M}_{ij}^e := (\mathbf{R}_e \Phi) \tilde{\mathbf{e}}_i \otimes (\mathbf{R}_e \Phi) \tilde{\mathbf{e}}_j \quad . \quad (7.3)$$

C_1^e, C_2^e, C_3^e sind Materialkonstanten.

- Schmid'sche Spannung im (i) -ten Gleitsystem

$$\tau^{(i)} := \mathbf{s}^{(i)} \cdot \mathbf{S} [\mathbf{n}^{(i)}] \quad . \quad (7.4)$$

- Skalare kin. Verfestigung im (i) -ten Gleitsystem

$$\xi^{(i)} := \mathbf{s}^{(i)} \cdot \underbrace{\left\{ \mathbf{Z}^{(i)} - 2\Gamma_k^{(i)} \mathbf{Z}^{(i)} \right\}}_{\xi^{(i)}} [\mathbf{n}^{(i)}] \quad . \quad (7.5)$$

- Viskoplastisches Fließgesetz

$$\dot{\gamma}_p^{(i)} = \frac{(\tau^{(i)} - \xi^{(i)})}{|\tau^{(i)} - \xi^{(i)}|} \cdot \dot{s}^{(i)} \quad (7.6)$$

mit

$$\dot{s}^{(i)} = \frac{\left\langle |\tau^{(i)} - \xi^{(i)}| - k_0^{(i)} \right\rangle^{m^{(i)}}}{\eta^{(i)}} \quad . \quad (7.7)$$

Hierbei sind $m^{(i)}, \eta^{(i)}$ und $k_0^{(i)}$ Materialkonstanten.

- Verzerrungstensor der kinematischen Verfestigung

$$\mathbf{\Gamma}_k^{(i)} = -\frac{\gamma_k^{(i)^2}}{2} \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} + \frac{\gamma_k^{(i)}}{2} (\mathbf{s}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} + \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{s}^{(i)}) \quad .$$

- Spannungstensor der kinematischen Verfestigung

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^{(i)} = & C_1^k \left\{ \left(\mathbf{\Gamma}_k^{(i)} \cdot (\mathbf{M}_{11}^k)^{(i)} \right) (\mathbf{M}_{11}^k)^{(i)} + \left(\mathbf{\Gamma}_k^{(i)} \cdot (\mathbf{M}_{22}^k)^{(i)} \right) (\mathbf{M}_{22}^k)^{(i)} + \right. \\ & \left. \left(\mathbf{\Gamma}_k^{(i)} \cdot (\mathbf{M}_{33}^k)^{(i)} \right) (\mathbf{M}_{33}^k)^{(i)} \right\} \\ & + C_2^k \left\{ (\mathbf{M}_{11}^k)^{(i)} \left(\mathbf{\Gamma}_k^{(i)} \cdot (\mathbf{M}_{22}^k)^{(i)} \right) + \left(\mathbf{\Gamma}_k^{(i)} \cdot (\mathbf{M}_{11}^k)^{(i)} \right) (\mathbf{M}_{22}^k)^{(i)} + \right. \\ & (\mathbf{M}_{22}^k)^{(i)} \left(\mathbf{\Gamma}_k^{(i)} \cdot (\mathbf{M}_{33}^k)^{(i)} \right) + \left(\mathbf{\Gamma}_k^{(i)} \cdot (\mathbf{M}_{22}^k)^{(i)} \right) (\mathbf{M}_{33}^k)^{(i)} + \\ & (\mathbf{M}_{33}^k)^{(i)} \left(\mathbf{\Gamma}_k^{(i)} \cdot (\mathbf{M}_{11}^k)^{(i)} \right) + \left. \left(\mathbf{\Gamma}_k^{(i)} \cdot (\mathbf{M}_{33}^k)^{(i)} \right) (\mathbf{M}_{11}^k)^{(i)} \right\} \\ & + C_3^k \left\{ \left(\mathbf{\Gamma}_k^{(i)} \cdot (\mathbf{M}_{12}^k)^{(i)} \right) (\mathbf{M}_{12}^k)^{(i)} + \left(\mathbf{\Gamma}_k^{(i)} \cdot (\mathbf{M}_{21}^k)^{(i)} \right) (\mathbf{M}_{21}^k)^{(i)} + \right. \\ & \left(\hat{\mathbf{\Gamma}}_k^{(i)} \cdot (\mathbf{M}_{13}^k)^{(i)} \right) (\mathbf{M}_{13}^k)^{(i)} + \left(\mathbf{\Gamma}_k^{(i)} \cdot (\mathbf{M}_{31}^k)^{(i)} \right) (\mathbf{M}_{31}^k)^{(i)} + \\ & \left. \left(\mathbf{\Gamma}_k^{(i)} \cdot (\mathbf{M}_{23}^k)^{(i)} \right) (\mathbf{M}_{23}^k)^{(i)} + \left(\mathbf{\Gamma}_k^{(i)} \cdot (\mathbf{M}_{32}^k)^{(i)} \right) (\mathbf{M}_{32}^k)^{(i)} \right\} \quad . \quad (7.8) \end{aligned}$$

Dabei lauten die Strukturtenoren in der kinematischen Verfestigung

$$(\mathbf{M}_{rs}^k)^{(i)} := (\mathbf{R}_e \mathbf{\Delta}^{(i)}) \tilde{\mathbf{e}}_r \otimes (\mathbf{R}_e \mathbf{\Delta}^{(i)}) \tilde{\mathbf{e}}_s \quad . \quad (7.9)$$

C_1^k, C_2^k, C_3^k sind Materialkonstanten.

- Evolutionsgleichung für $\dot{\gamma}_k^{(i)}$

$$\dot{\gamma}_k^{(i)} = \dot{\gamma}_p^{(i)} - \dot{s}^{(i)} b^{(i)} \left\{ -\gamma_k^{(i)} \mathbf{n}^{(i)} \cdot \mathbf{Z}^{(i)} [\mathbf{n}^{(i)}] + \mathbf{s}^{(i)} \cdot \mathbf{Z}^{(i)} [\mathbf{n}^{(i)}] \right\} \quad . \quad (7.10)$$

Hierbei ist $b^{(i)}$ eine Materialkonstante.

- Evolution von \mathbf{A}_p

$$\overset{\Delta}{\mathbf{A}}_p = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_p^{(i)} (\mathbf{s}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} + \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{s}^{(i)}) \quad . \quad (7.11)$$

- Evolutionsgleichung für den Drehtensor $(\mathbf{R}_e \Phi)$

$$(\mathbf{R}_e \Phi)^{\cdot} := \left\{ \mathbf{W} - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_p^{(i)} (\mathbf{s}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} - \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{s}^{(i)}) \right\} (\mathbf{R}_e \Phi) \quad . \quad (7.12)$$

- Evolutionsgleichungen für die Drehtensoren $(\mathbf{R}_e \Delta^{(i)})$

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &:= \mathbf{W} - \frac{1}{2n} \sum_{a=1}^n \dot{\gamma}_p^{(a)} (\mathbf{s}^{(a)} \otimes \mathbf{n}^{(a)} - \mathbf{n}^{(a)} \otimes \mathbf{s}^{(a)}) \quad , \\ (\mathbf{R}_e \Delta^{(i)})^{\cdot} &= \left\{ \mathbf{K} + \lambda_{\Delta}^{(i)} \dot{s}^{(i)} \left(\Gamma_k^{(i)} \mathbf{Z}^{(i)} - \mathbf{Z}^{(i)} \Gamma_k^{(i)} \right) \right\} (\mathbf{R}_e \Delta^{(i)}) \quad . \end{aligned} \quad (7.13)$$

Hierbei ist $\lambda_{\Delta}^{(i)}$ eine Materialkonstante.

- Basisvektoren

$$\mathbf{s}^{(i)} = (\mathbf{R}_e \Phi) \tilde{\mathbf{s}}^{(i)} \quad , \quad (7.14)$$

$$\mathbf{n}^{(i)} = (\mathbf{R}_e \Phi) \tilde{\mathbf{n}}^{(i)} \quad . \quad (7.15)$$

Kapitel 8

Numerik

Um das Materialmodell aus den letzten Kapiteln numerisch behandeln zu können, müssen neben algebraischen Gleichungen auch folgende Differentialgleichungen gelöst werden:

1. Evolution von \mathbf{A}_p

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}_p = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_p^{(i)} (\mathbf{s}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} + \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{s}^{(i)}) - \mathbf{L}^T \mathbf{A}_p - \mathbf{A}_p \mathbf{L} \quad . \quad (8.1)$$

Anfangswert: $\mathbf{A}_p(t=0) = \mathbf{0}$.

2. Evolution für den Drehtensor $(\mathbf{R}_e \Phi)$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{R}_e \Phi) = \left\{ \mathbf{W} - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_p^{(i)} (\mathbf{s}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} - \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{s}^{(i)}) \right\} (\mathbf{R}_e \Phi) \quad . \quad (8.2)$$

Anfangswert: $(\mathbf{R}_e \Phi)(t=0) = (\mathbf{R}_e \Phi)_0$.

3. Evolutionsgleichung für die Drehtensoren $(\mathbf{R}_e \Delta^{(i)})$

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &:= \mathbf{W} - \frac{1}{2n} \sum_{a=1}^n \dot{\gamma}_p^{(a)} (\mathbf{s}^{(a)} \otimes \mathbf{n}^{(a)} - \mathbf{n}^{(a)} \otimes \mathbf{s}^{(a)}) \quad , \\ \frac{d}{dt} (\mathbf{R}_e \Delta^{(i)}) &= \left\{ \mathbf{K} + \lambda \dot{s} \left(\Gamma_k^{(i)} \mathbf{Z}^{(i)} - \mathbf{Z}^{(i)} \Gamma_k^{(i)} \right) \right\} (\mathbf{R}_e \Delta^{(i)}) \quad . \end{aligned} \quad (8.3)$$

Anfangswerte: $(\mathbf{R}_e \Delta^{(i)})(t=0) = (\mathbf{R}_e \Phi)_0$ (= dem idealen Gitter) .

Es handelt sich hier um ein System von Differentialgleichungen 1.Ordnung, die zusammen mit den algebraischen Gleichungen mit dem *Runge-Kutta-Verfahren* gelöst wurden.

Achtung:

Bei der Lösung des Differentialgleichungssystems ist zu beachten, daß die Drehtensoren *orthogonale Tensoren* bleiben müssen. Dies führt zu einer besonderen Darstellung der Drehtensoren bei der Lösung des Differentialgleichungssystems.

Ein Beispiel zur Verdeutlichung der Problematik:

Der Drehtensor $(\mathbf{R}_e \Phi)$ sei zum Zeitpunkt $t = 0$ orthogonal und mit $(\mathbf{R}_e \Phi)_0$ abgekürzt. Als Evolutionsgleichung sei gegeben:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{R}_e \Phi) = \mathbf{N} \quad \text{mit} \quad \mathbf{N} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \setminus \{\mathbf{0}\} \quad . \quad (8.4)$$

Anfangswert: $(\mathbf{R}_e \Phi)(t = 0) = (\mathbf{R}_e \Phi)_0$ als orthogonaler Tensor vorgegeben.

Explizit-Euler (der Einfachheit halber) ergibt nun:

$$(\mathbf{R}_e \Phi)_1 = (\mathbf{R}_e \Phi)_0 + \Delta t \cdot \mathbf{N} \quad . \quad (8.5)$$

Die Orthogonalitätsbedingung für $(\mathbf{R}_e \Phi)_1$ liefert :

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_e \Phi)_1^T (\mathbf{R}_e \Phi)_1 &= [(\mathbf{R}_e \Phi)_0 + \Delta t \cdot \mathbf{N}]^T [(\mathbf{R}_e \Phi)_0 + \Delta t \cdot \mathbf{N}] \\ &= \underbrace{(\mathbf{R}_e \Phi)_0^T (\mathbf{R}_e \Phi)_0}_1 + \Delta t \cdot \mathbf{N}^T (\mathbf{R}_e \Phi)_0 + (\mathbf{R}_e \Phi)_0^T \Delta t \cdot \mathbf{N} + \Delta t^2 \cdot \mathbf{N}^T \mathbf{N} \\ &= \mathbf{1} + \Delta t \underbrace{\{\mathbf{N}^T (\mathbf{R}_e \Phi)_0 + (\mathbf{R}_e \Phi)_0^T \mathbf{N} + \mathbf{N}^T \mathbf{N}\}}_{\text{im Allgemeinen } \neq \mathbf{0}} \quad . \end{aligned}$$

Somit ist für jedes $\Delta t \neq 0$ die Orthogonalität des Tensors $(\mathbf{R}_e \Phi)_1$ verletzt.

Eine Möglichkeit aus der Problematik herauszukommen, ist folgende Idee:

Jeder Drehtensor läßt sich aus 3 *Generatoren* aufbauen.

Gebräuchliche Generatoren sind die 3 *Euler-Winkel* oder die *Rodriguez-Formulierung*.

Die Idee ist nun, aus den Differentialgleichungen für die Drehtensoren Differentialgleichungen für die Generatoren herzuleiten und anschließend die Drehtensoren daraus aufzubauen. Damit bleibt die Orthogonalität der Drehtensoren gesichert.

8.1 Euler Winkel

Drehung um die z-Achse, (x-Achse \Rightarrow x'-Achse, y-Achse \Rightarrow y'-Achse):

$$\mathbf{D}_z(\phi) := \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad . \quad (8.6)$$

Drehung um die y'-Achse, (x'-Achse \Rightarrow x''-Achse, z-Achse \Rightarrow z'-Achse):

$$\mathbf{D}_{y'}(\theta) := \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad . \quad (8.7)$$

Drehung um die z' -Achse, (y' -Achse $\Rightarrow y''$ -Achse, x'' -Achse $\Rightarrow x'''$ -Achse):

$$\mathbf{D}_{z'}(\psi) := \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (8.8)$$

Jede beliebige Drehung $\mathbf{O} \in SO(3)$ im Raum \mathbb{R}^3 läßt sich durch Hintereinanderschaltung der Drehungen $\mathbf{D}_z(\phi)$, $\mathbf{D}_{y'}(\theta)$ und $\mathbf{D}_{z'}(\psi)$ darstellen:

$$\mathbf{O} = \mathbf{D}_{z'}(\psi) \circ \mathbf{D}_{y'}(\theta) \circ \mathbf{D}_z(\phi) . \quad (8.9)$$

Bezüglich eines raumfesten (x,y,z)-Koordinatensystems läßt sich \mathbf{O} in Komponenten darstellen:

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \psi & -\cos \psi \cos \theta \sin \phi - \cos \phi \sin \psi & -\cos \psi \sin \theta \\ \sin \psi \cos \theta \cos \phi + \cos \psi \sin \phi & -\sin \psi \cos \theta \sin \phi + \cos \phi \cos \psi & -\sin \psi \sin \theta \\ \sin \theta \cos \phi & -\sin \theta \sin \phi & \cos \theta \end{pmatrix} . \quad (8.10)$$

8.2 Parametrisierung der Tensoren $(\mathbf{R}_e \Phi)$ und $(\mathbf{R}_e \Delta^{(i)})$ mit Euler-Winkeln

Der Tensor $(\mathbf{R}_e \Phi)$ wird wie in Gleichung (8.10) parametrisiert:

$$(\mathbf{R}_e \Phi) = \begin{pmatrix} O_{11} & O_{12} & O_{13} \\ O_{21} & O_{22} & O_{23} \\ O_{31} & O_{32} & O_{33} \end{pmatrix} .$$

Dabei sind:

$$\begin{aligned} O_{11} &= \cos \psi \cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \psi \\ O_{12} &= -\cos \psi \cos \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi \\ O_{13} &= -\cos \psi \sin \theta \\ O_{21} &= \sin \psi \cos \theta \cos \phi + \cos \psi \sin \phi \\ O_{22} &= -\sin \psi \cos \theta \sin \phi + \cos \phi \cos \psi \\ O_{23} &= -\sin \psi \sin \theta \\ O_{31} &= \sin \theta \cos \phi \\ O_{32} &= -\sin \theta \sin \phi \\ O_{33} &= \cos \theta . \end{aligned}$$

Die Parametrisierung der Drehtensoren $(\mathbf{R}_e \Delta^{(i)})$ erfolgt analog mit den Winkeln $\phi_\Delta^{(i)}$, $\theta_\Delta^{(i)}$ und $\psi_\Delta^{(i)}$.

8.2.1 Ableitungen der Tensoren $(\mathbf{R}_e \Phi)$ und $(\mathbf{R}_e \Delta^{(i)})$

Mit der obigen Darstellung für $(\mathbf{R}_e \Phi)$ läßt sich die Evolutionsgleichung für $(\mathbf{R}_e \Phi)$ folgendermaßen schreiben:

$$\frac{d(\mathbf{R}_e \Phi)}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} O_{11} & O_{12} & O_{13} \\ O_{21} & O_{22} & O_{23} \\ O_{31} & O_{32} & O_{33} \end{pmatrix} = \left\{ \mathbf{W} - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_p^{(i)} (\mathbf{s}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} - \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{s}^{(i)}) \right\} (\mathbf{R}_e \Phi) .$$

Die Ableitungen lauten komponentenweise:

$$\begin{aligned}\frac{d O_{11}}{dt} &= -\sin \psi \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta - \cos \psi \sin \phi \dot{\phi} \cos \theta - \cos \psi \cos \phi \sin \theta \dot{\theta} \\ &\quad - \cos \phi \dot{\phi} \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \dot{\psi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d O_{12}}{dt} &= \sin \psi \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi + \cos \psi \sin \theta \dot{\theta} \sin \phi - \cos \psi \cos \theta \cos \phi \dot{\phi} \\ &\quad - \cos \psi \dot{\psi} \cos \phi + \sin \psi \sin \phi \dot{\phi}\end{aligned}$$

$$\frac{d O_{13}}{dt} = \sin \psi \dot{\psi} \sin \theta - \cos \psi \cos \theta \dot{\theta}$$

$$\begin{aligned}\frac{d O_{21}}{dt} &= \cos \psi \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \sin \psi \sin \theta \dot{\theta} \cos \phi - \sin \psi \cos \theta \sin \phi \dot{\phi} \\ &\quad - \sin \psi \dot{\psi} \sin \phi + \cos \psi \cos \phi \dot{\phi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d O_{22}}{dt} &= -\cos \psi \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi + \sin \psi \sin \theta \dot{\theta} \sin \phi - \sin \psi \cos \theta \cos \phi \dot{\phi} \\ &\quad - \sin \phi \dot{\phi} \cos \psi - \cos \phi \sin \psi \dot{\psi}\end{aligned}$$

$$\frac{d O_{23}}{dt} = -\cos \psi \dot{\psi} \sin \theta - \sin \psi \cos \theta \dot{\theta}$$

$$\frac{d O_{31}}{dt} = \cos \theta \dot{\theta} \cos \phi - \sin \theta \sin \phi \dot{\phi}$$

$$\frac{d O_{32}}{dt} = -\cos \theta \dot{\theta} \sin \phi - \sin \theta \cos \phi \dot{\phi}$$

$$\frac{d O_{33}}{dt} = -\sin \theta \dot{\theta} \quad .$$

Nun wählt man aus den 9 skalaren Gleichungen drei (möglichst einfache) aus, z.B. die (1,3), (3,1) und (3,3) Komponente:

Abkürzung:

$$\mathbf{K} := \mathbf{W} - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_p^{(i)} (\mathbf{s}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} - \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{s}^{(i)}) \quad .$$

(1,1)-Komponente:

$$\begin{aligned}\{\mathbf{K}(\mathbf{R}_e \Phi)\}_{(11)} &= -\sin \psi \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta - \cos \psi \sin \phi \dot{\phi} \cos \theta - \cos \psi \cos \phi \sin \theta \dot{\theta} \\ &\quad - \cos \phi \dot{\phi} \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \dot{\psi} \quad .\end{aligned}\tag{8.11}$$

(1,2)-Komponente:

$$\begin{aligned}\{\mathbf{K}(\mathbf{R}_e \Phi)\}_{(12)} &= \sin \psi \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi + \cos \psi \sin \theta \dot{\theta} \sin \phi - \cos \psi \cos \theta \cos \phi \dot{\phi} \\ &\quad - \cos \psi \dot{\psi} \cos \phi + \sin \psi \sin \phi \dot{\phi} \quad .\end{aligned}\tag{8.12}$$

(2,1)-Komponente:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{K}(\mathbf{R}_e \mathbf{\Phi})\}_{(21)} = & \cos \psi \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \sin \psi \sin \theta \dot{\theta} \cos \phi - \sin \psi \cos \theta \sin \phi \dot{\phi} \\ & - \sin \psi \dot{\psi} \sin \phi + \cos \psi \cos \phi \dot{\phi} \quad . \end{aligned} \quad (8.13)$$

Die drei Komponentengleichungen können als Gleichungssystem geschrieben werden, das numerisch gelöst werden kann:

$$\begin{pmatrix} -\cos \psi \sin \phi \cos \theta - \cos \phi \sin \psi & -\cos \psi \cos \phi \sin \theta & -\sin \psi \cos \phi \cos \theta - \sin \phi \cos \psi \\ -\cos \psi \cos \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi & \cos \psi \sin \theta \sin \phi & \sin \psi \cos \theta \sin \phi - \cos \psi \cos \phi \\ -\sin \psi \cos \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & -\sin \psi \sin \theta \cos \phi & \cos \psi \cos \theta \cos \phi - \sin \psi \sin \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{\mathbf{K}(\mathbf{R}_e \mathbf{\Phi})\}_{(11)} \\ \{\mathbf{K}(\mathbf{R}_e \mathbf{\Phi})\}_{(12)} \\ \{\mathbf{K}(\mathbf{R}_e \mathbf{\Phi})\}_{(21)} \end{pmatrix} \quad (8.14)$$

Bei der numerischen Lösung des Materialmodells werden nun diese 3 Gleichungen für $\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}$ anstelle der Differentialgleichung für $(\mathbf{R}_e \mathbf{\Phi})$ benutzt. Sobald die Winkel ϕ, θ, ψ für den neuen Zeitschritt bekannt sind, kann daraus der Tensor $(\mathbf{R}_e \mathbf{\Phi})$ aufgebaut werden und seine Orthogonalität bleibt erhalten.

Da in den weiteren Rechnungen nur eine einfache Scherung in der (x, z) -Ebene betrachtet wird, fallen die Winkel ϕ und ψ weg und nur der Winkel θ bleibt übrig.

Analoges gilt für die Drehtensoren $(\mathbf{R}_e \mathbf{\Delta}^{(i)})$ mit den Winkeln $\phi_{\Delta}^{(i)}, \theta_{\Delta}^{(i)}$ und $\psi_{\Delta}^{(i)}$.

Kapitel 9

Ergebnisse des Einkristallmodells

Mit dem hergeleiteten Materialmodell zur Beschreibung von anisotropem, elastisch-plastischem Einkristall-Materialverhalten werden in diesem Kapitel für einige einfache Belastungen Testrechnungen durchgeführt. Damit soll gezeigt werden, daß das Materialmodell in der Lage ist, durch geeignete Wahl der Materialparameter ein physikalisch sinnvolles Materialverhalten eines Einkristalls vorherzusagen. Das Einkristall-Modell ist allerdings beschränkt auf den Fall von Anisotropie, die von Anfang an in dem Material vorherrscht (z.B. kubische Kristallsymmetrie), und bei der mit zunehmender Deformation nur Rotationen der Anisotropieachsen induziert werden.

Hinweise:

1. Die Rechnungen werden nur für einfache Scherung durchgeführt. Der Grund ist die einfache Gestalt des Deformationsgradienten \mathbf{F} . Außerdem werden bei einfacher Scherung Rotationen des Kristallgitters angeregt, die besonders untersucht werden sollen.
2. Die entwickelte Theorie gilt für Kristallsysteme mit n Gleitsystemen. Daher können Rechnungen mit verschiedener Anzahl von Gleitsystemen durchgeführt werden. Zuerst werden Rechnungen mit einem, dann mit zwei senkrecht aufeinander stehenden und zuletzt mit allen 12 Gleitsystemen ausgeführt.
3. Das hergeleitete Materialmodell wird mit Modellen aus der Literatur verglichen. Diese Modelle beinhalten die Anisotropie nur in den plastischen Gleichungen, das Elastizitätsgesetz wird isotrop formuliert. Diese Vorgehensweise wurde hier übernommen und das Elastizitätsgesetz ist im folgenden deshalb isotrop formuliert.
4. Für die Rechnungen mit einem und zwei senkrecht aufeinander stehenden Gleitsystemen wird die Fließgrenze k_0 konstant gelassen und die kinematische Verfestigung ausgeschaltet. Eine Entwicklung der isotropen und kinematischen Verfestigung erfolgt erst im Kapitel mit dem vollen f.c.c. Kristallsystem (12 Gleitsysteme).
5. In den Rechnungen für das volle f.c.c. Kristallsystem (12 Gleitsysteme) werden sich physikalisch nicht sinnvolle Ergebnisse für die Rotationen ergeben. Deshalb werden "Kopplungseffekte" in die Evolutionsgleichungen für die isotrope und kinematische Verfestigung eingeführt, die die Rotationen sinnvoll stabilisieren.

9.1 Grundlegendes zur einfachen Scherung

Um eine Materialantwort durch quasianalytisches Lösen des in Kapitel 7 angegebenen Anfangs-Randwertproblems zu erhalten, muß eine Belastung gewählt werden, bei der sich ein homogener Deformationszustand und ein homogener Spannungszustand im Körper einstellt. Dies ist z.B. bei einfacher Scherung der Fall. Hierbei wird ein Quader an der Unterseite festgehalten und an der Oberseite eine Verschiebung \mathbf{u} in tangentialer Richtung entlang einer Quaderseite aufgebracht (siehe Abbildung 9.1). Wird mit

$$\gamma = \tan \theta \quad (9.1)$$

eine Scherung definiert, wobei $\phi = \phi(t)$ den Winkel der Scherung beschreibt, lautet der sich einstellende Deformationsgradient ($\gamma(t) = \text{Scherung}$)

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

Der Geschwindigkeitsgradient mit symmetrischer Verzerrungsgeschwindigkeit und antisymmetrischem Wirbeltensor ist durch

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{\gamma} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\dot{\gamma}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\dot{\gamma}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.3)$$

gegeben, wobei mit $\dot{\gamma}$ die Ableitung der Scherung γ nach der Zeit t bezeichnet wird.

Für diese Geometrie und diese Randbedingungen werden die Differentialgleichungen mit Hilfe des Runge-Kutta-Verfahrens gelöst.

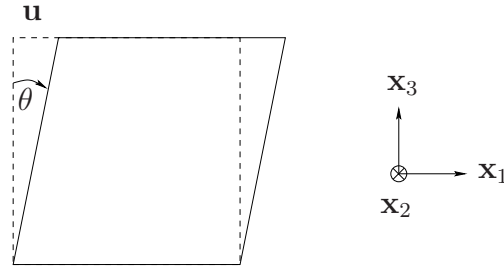


Abbildung 9.1: Einfache Scherung

Bei den Untersuchungen für kubisches Materialverhalten wird davon ausgegangen, daß das Dreibein der Hauptachsen des kubischen Kristalls ($\mathbf{m}^{(1)}, \mathbf{m}^{(2)}, \mathbf{m}^{(3)}$) so orientiert ist, daß die $\mathbf{m}^{(2)}$ -Achse immer in \mathbf{x}_2 -Richtung zeigt, und die $(\mathbf{m}^{(1)}, \mathbf{m}^{(3)})$ -Ebene somit in der Scherebene ($\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3$) liegt.

Die Orientierung der Anisotropieachsen im Elastizitätsgesetz und in der kinematischen Verfestigung werden damit durch einen Winkel θ_e bzw. θ_k beschrieben, während die anderen Eulerwinkel die Werte $\phi_e = 0^\circ, \psi_e = 0^\circ$ bzw. $\phi_k = 0^\circ, \psi_k = 0^\circ$ haben.

Die Drehung des ungestörten Gitters wird somit durch den Winkel θ_e beschrieben, wobei das (i)-te Gleitsystem um eine lokale Störstelle mit dem Winkel $\theta_k^{(i)}$ rotiert.

Trotz des eigentlich zweidimensionalen Problems wurden diese Testrechnungen mit dem kompletten dreidimensionalen Modell durchgeführt, um auch hier eventuelle Effekte,

die aus der Scherebene herausführen, zu berücksichtigen.

Ein Problem zur phänomenologischen Beschreibung des Materialverhaltens besteht darin, geeignete Materialparameter zu bestimmen. Hierzu müssen Experimente gefunden werden, aus denen dann mit geeigneten Verfahren (z.B. neuronale Netze) die Materialparameter ermittelt werden können. Da dies im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich war, wurden die Materialparameter so angenommen, daß physikalisch akzeptable Ergebnisse erhalten werden.

C_1^e	=	170000	MPa	C_1^k	=	2000	MPa
C_2^e	=	124000	MPa	C_2^k	=	2000	MPa
C_3^e	=	76000	MPa	C_3^k	=	1600	MPa
k_0	=	150	MPa	b	=	1E-5	
m	=	3.0		λ	=	0.1	
η	=	20000	(MPa) ^m s				
$\dot{\gamma}$	=	0.1	s ⁻¹				

Tabelle 9.1: Tabelle der Materialparameter für kubisches Kristallsystem

9.2 Rotation von einer Gleitebene beim elastisch-plastischen Körper

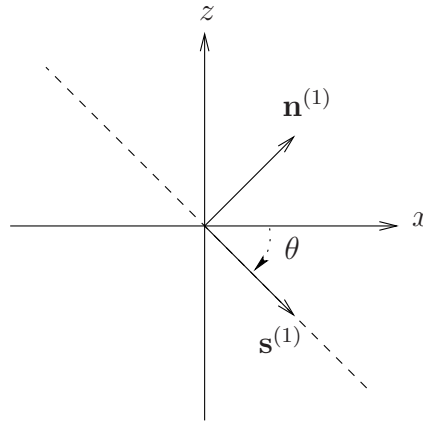


Abbildung 9.2: Ein Gleitsystem

Definition des Gleitsystems:

$$\mathbf{s}^{(1)} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}^{(1)} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

Der Einfachheit halber wird hier ein isotropes Elastizitätsgesetz verwendet.

$$\mathbf{S} = 2\mu\mathbf{A}_e + \lambda sp(\mathbf{A}_e)\mathbf{1} \quad (9.5)$$

Die Materialkonstanten μ und λ errechnen sich aus:

$$\mu = \frac{E}{2 + 2\nu} \quad , \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

(Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl: $E = 210000$ MPa und $\nu = 0.3$) .

Als Startorientierung wird der Winkel $\theta = \theta_e = \theta_k = 0^\circ$ gewählt.

Die Fließgrenze k_0 ist konstant und die kinematische Verfestigung ist ausgeschaltet.

Ergebnis:

Als Ergebnis erhält man eine Schwingung des Winkels θ_e und der Spannung σ_{13} .

Dieses Ergebnis wird hier nicht weiter untersucht und ist nur zur Einführung dargestellt.

Für weitere Untersuchung eignet sich z.B. die Abhängigkeit der Schwingungsdauer von den Materialparametern.

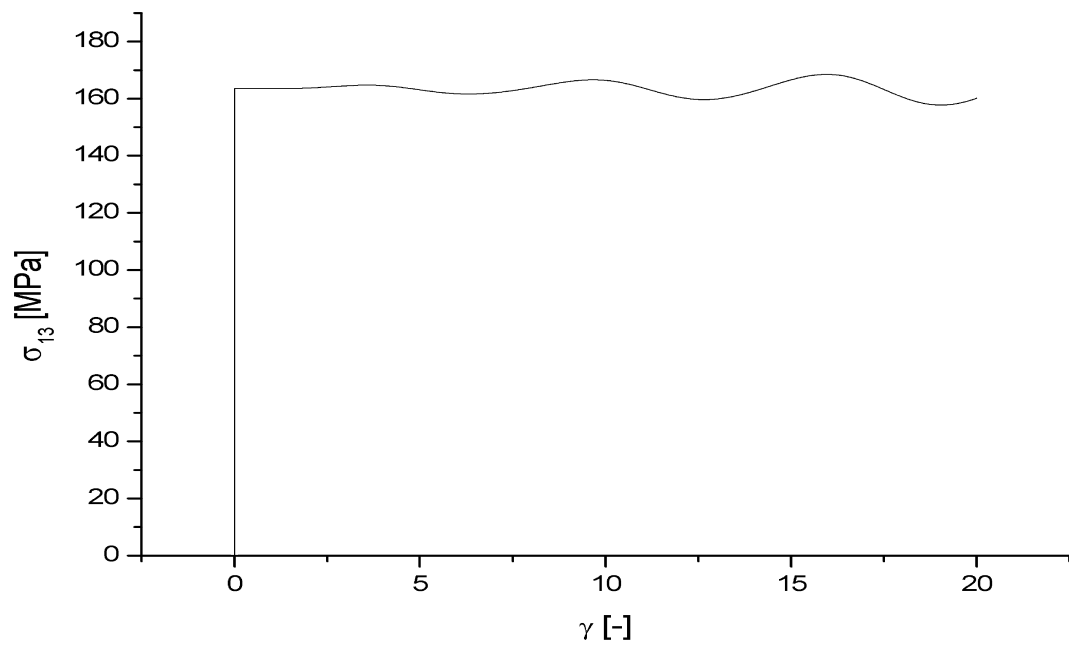


Abbildung 9.3: Spannung σ_{13} bei einem Gleitsystem

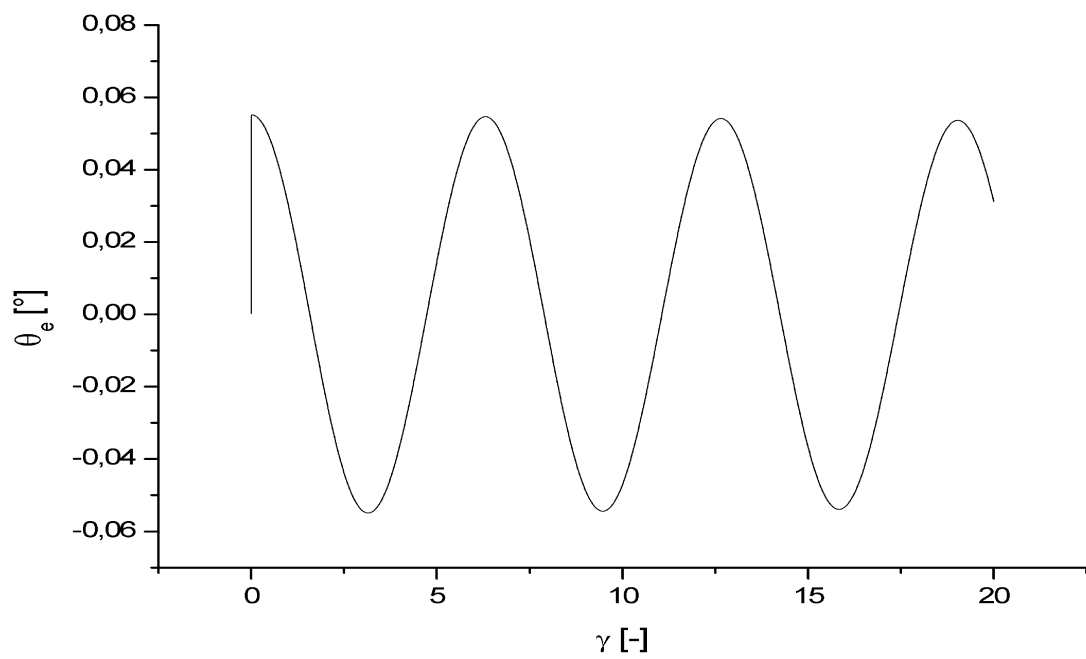


Abbildung 9.4: Drehwinkel θ_e bei einem Gleitsystem

9.3 Rotation von zwei senkrecht aufeinander stehenden Gleitebenen

Erstes Gleitsystem:

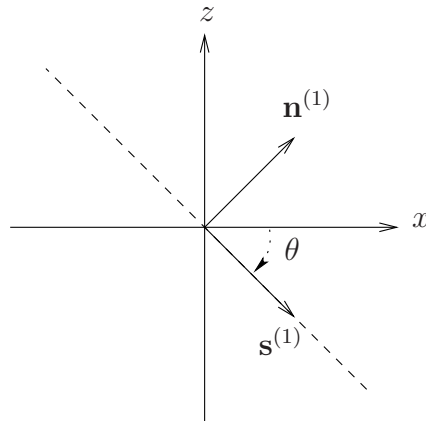


Abbildung 9.5: Gleitsystem Nr. 1

Zweites Gleitsystem:

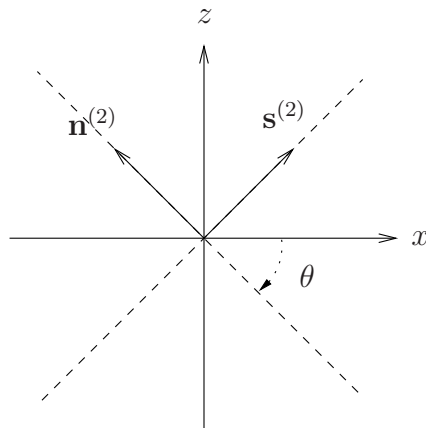


Abbildung 9.6: Gleitsystem Nr. 2

Definition der Gleitsysteme:

Erstes Gleitsystem

$$\hat{\mathbf{s}}^{(1)} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{n}}^{(1)} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (9.6)$$

Zweites Gleitsystem

$$\hat{\mathbf{s}}^{(2)} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{n}}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad (9.7)$$

Der Einfachheit halber wird auch hier ein isotropes Elastizitätsgesetz verwendet.

$$\mathbf{S} = 2\mu\mathbf{A}_e + \lambda \operatorname{sp}(\mathbf{A}_e)\mathbf{1} \quad . \quad (9.8)$$

Die Materialkonstanten μ und λ errechnen sich aus:

$$\mu = \frac{E}{2+2\nu} \quad , \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Der Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl sind $E = 210000 \text{ MPa}$ und $\nu = 0.3$.

Als Startorientierung werden verschiedene Winkel $\theta = \theta_e = \theta_k$ zwischen -90° und 90° gewählt.

Auch hier ist die isotrope Verfestigung konstant und die kinematische Verfestigung ausgeschaltet.

Als Ergebnis erhält man eine fortlaufende Rotation des Winkels θ_e . Dieser ist für alle Startorientierungen gemeinsam in der Abbildung zum Verlauf der Dehnung aufgetragen.

Die zugehörigen Spannungsverläufe der Schubspannung σ_{13} zeigen periodisches Verhalten. Dieser periodische Spannungsverlauf ist damit zu erklären, daß nach einer Drehung von 90° um die x_2 -Achse die gleichen Gleitsysteme im kubischen Kristall vorliegen.

Es gilt somit $\sigma_{13}(\theta_e^1) = \sigma_{13}(\theta_e^0)$ für $\theta_e^1 = \theta_e^0 \pm 90^\circ$. (Gleichheit der Spannungen nach einer Drehung um 90°).

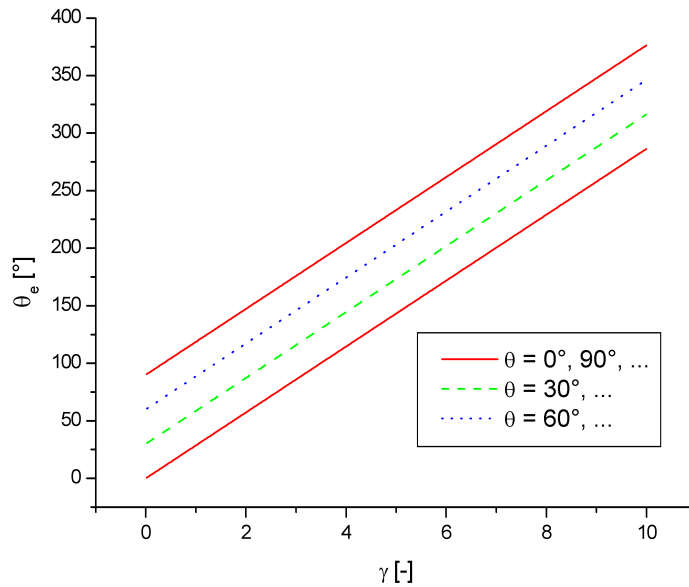


Abbildung 9.7: Drehwinkel θ_e bei zwei senkrecht aufeinander stehenden Gleitsystemen

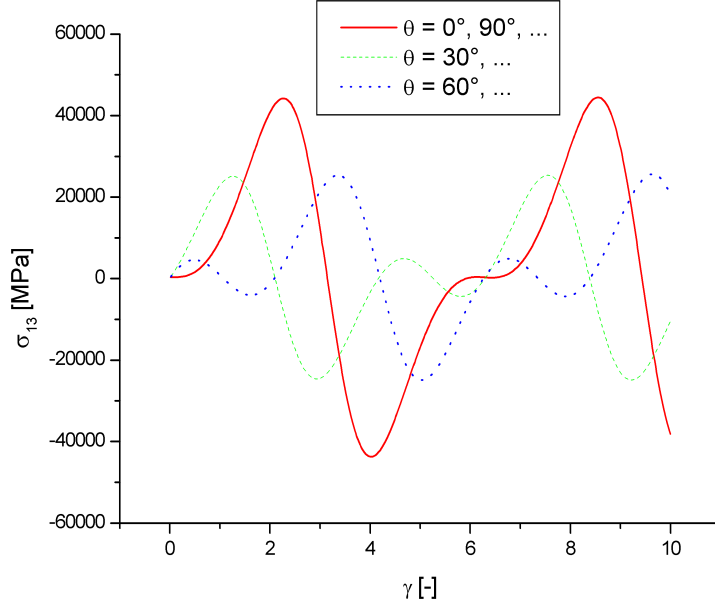


Abbildung 9.8: Spannung σ_{13} bei zwei senkrecht aufeinander stehenden Gleitsystemen

In den folgenden Abschnitten wird die Rotation eines Körper mit zwei senkrecht aufeinander stehenden Gleitsystemen für rein plastisches und danach für elastisch-plastisches Materialverhalten analytisch untersucht.

Dazu wird als Hilfsmittel der plastische Anteil des symmetrischen Geschwindigkeitsgradienten \mathbf{D}_p benötigt:

Auswertung der kinematischen Beziehungen $\mathbf{D} = \overset{\Delta}{\mathbf{A}}_e + \overset{\Delta}{\mathbf{A}}_p$

In der Zwischenkonfiguration lautet $\hat{\mathbf{L}}_p$:

$$\hat{\mathbf{L}}_p - \dot{\Phi}\Phi^T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \dot{\gamma}_p^{(i)} (\hat{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)}) \quad (9.9)$$

und dessen symmetrischer Anteil $\hat{\mathbf{D}}_p$:

$$\hat{\mathbf{D}}_p = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^2 \dot{\gamma}_p^{(i)} (\hat{\mathbf{s}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(i)} + \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \otimes \hat{\mathbf{s}}^{(i)}) \quad . \quad (9.10)$$

In der Momentankonfiguration lautet \mathbf{D}_p :

$$\mathbf{D}_p = \overset{\Delta}{\mathbf{A}}_p = \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{D}}_p \mathbf{R}_e^T = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^2 \dot{\gamma}_p^{(i)} (\mathbf{s}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} + \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{s}^{(i)}) \quad . \quad (9.11)$$

Berechnung von $\mathbf{s}^{(1)} \otimes \mathbf{n}^{(1)} + \mathbf{n}^{(1)} \otimes \mathbf{s}^{(1)}$ und $\mathbf{s}^{(2)} \otimes \mathbf{n}^{(2)} + \mathbf{n}^{(2)} \otimes \mathbf{s}^{(2)}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{s}^{(1)} \otimes \mathbf{n}^{(1)} &= \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \theta & 0 & \cos^2 \theta \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sin^2 \theta & 0 & -\sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} \\ \mathbf{s}^{(2)} \otimes \mathbf{n}^{(2)} &= \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \theta & 0 & \sin^2 \theta \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos^2 \theta & 0 & \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} \\ \mathbf{s}^{(1)} \otimes \mathbf{n}^{(1)} + \mathbf{n}^{(1)} \otimes \mathbf{s}^{(1)} &= \begin{pmatrix} 2 \sin \theta \cos \theta & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} \\ \mathbf{s}^{(2)} \otimes \mathbf{n}^{(2)} + \mathbf{n}^{(2)} \otimes \mathbf{s}^{(2)} &= \begin{pmatrix} -2 \sin \theta \cos \theta & 0 & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin^2 \theta - \cos^2 \theta & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} .\end{aligned}$$

Damit lautet \mathbf{D}_p in der Momentankonfiguration

$$\mathbf{D}_p = \frac{\dot{\gamma}_p^{(1)} - \dot{\gamma}_p^{(2)}}{4} \begin{pmatrix} 2 \sin \theta \cos \theta & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} \quad (9.12)$$

und

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_e + \frac{\dot{\gamma}_p^{(1)} - \dot{\gamma}_p^{(2)}}{4} \begin{pmatrix} 2 \sin \theta \cos \theta & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} . \quad (9.13)$$

9.3.1 Einfache Scherung bei starrplastischem Körper

Der Geschwindigkeitsgradient bei einfacher Scherung mit symmetrischer Verzerrungsgeschwindigkeit und antisymmetrischem Wirbeltensor ist durch

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{\gamma} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{\gamma} \\ 0 & 0 & 0 \\ \dot{\gamma} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{\gamma} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dot{\gamma} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.14)$$

mit $\dot{\gamma} \neq 0$ gegeben.

Für den starrplastischen Körper gilt nun:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_p \quad (9.15)$$

und damit

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{\gamma} \\ 0 & 0 & 0 \\ \dot{\gamma} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\dot{\gamma}_p^{(1)} - \dot{\gamma}_p^{(2)}}{4} \begin{pmatrix} 2 \sin \theta \cos \theta & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} . \quad (9.16)$$

Auswertung von (9.16):

Aus der (1,1)-Komponente ergibt sich:

$$0 = (\dot{\gamma}_p^{(1)} - \dot{\gamma}_p^{(2)}) \sin \theta \cos \theta \quad . \quad (9.17)$$

Aus der (1,3)-Komponente ergibt sich:

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2}(\dot{\gamma}_p^{(1)} - \dot{\gamma}_p^{(2)})(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad \text{mit} \quad \dot{\gamma} \neq 0 \quad . \quad (9.18)$$

Hinreichende Bedingungen zum Lösen von (9.17):

Entweder

$$\dot{\gamma}_p^{(1)} - \dot{\gamma}_p^{(2)} = 0 \quad \text{und} \quad \theta \neq n \cdot \frac{\pi}{2}, \quad n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \quad (9.19)$$

oder

$$\dot{\gamma}_p^{(1)} - \dot{\gamma}_p^{(2)} \neq 0 \quad \text{und} \quad \theta = n \cdot \frac{\pi}{2}, \quad n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \quad (9.20)$$

Die erste Bedingung $\dot{\gamma}_p^{(1)} - \dot{\gamma}_p^{(2)} = 0$ führt allerdings mit Gleichung (9.18) zu $\dot{\gamma} = 0$, was ausgeschlossen war.

Als einzige Lösung von (9.17) und (9.18) bleibt somit

$$\frac{1}{2}(\dot{\gamma}_p^{(1)} - \dot{\gamma}_p^{(2)}) = \dot{\gamma} \neq 0 \quad \text{und} \quad \theta = n \cdot \frac{\pi}{2}, \quad n \in \{0, \pm 2, \pm 4, \dots\} \quad (9.21)$$

übrig.

Plastisches Fließen findet nur statt, wenn die Gleitebenen zu Beginn mit $\theta = 0^\circ$ orientiert sind.

Dabei lautet die Beziehung zwischen der äußeren Schergeschwindigkeit $\dot{\gamma}$ und den inneren Schergeschwindigkeiten in den Gleitebenen $\dot{\gamma}_p^{(1)}$ und $\dot{\gamma}_p^{(2)}$:

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2}(\dot{\gamma}_p^{(1)} - \dot{\gamma}_p^{(2)}) \quad \text{für} \quad \theta = 0^\circ \quad . \quad (9.22)$$

Für die Entwicklung der Basisvektoren $\mathbf{s}^{(i)}$ und $\mathbf{n}^{(i)}$ eines jeden Gleitsystems gilt:

$$\dot{\mathbf{s}}^{(i)} = (\mathbf{R}_e \Phi) (\mathbf{R}_e \Phi)^T \mathbf{s}^{(i)} \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{n}}^{(i)} = (\mathbf{R}_e \Phi) (\mathbf{R}_e \Phi)^T \mathbf{n}^{(i)}$$

mit

$$(\mathbf{R}_e \Phi) (\mathbf{R}_e \Phi)^T = \mathbf{W} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^2 \dot{\gamma}_p^{(i)} (\mathbf{s}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} - \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{s}^{(i)}) \quad . \quad (9.23)$$

Mit dem vorgegebenen antisymmetrischen Wirbeltensor bei einfacher Scherung

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\dot{\gamma}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lautet die Gleichung (9.23) für $\theta = 0^\circ$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_e \Phi) (\mathbf{R}_e \Phi)^T &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\dot{\gamma}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \dot{\gamma}_p^{(1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \dot{\gamma}_p^{(2)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\dot{\gamma}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} (\dot{\gamma}_p^{(1)} + \dot{\gamma}_p^{(2)}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad . \end{aligned} \quad (9.24)$$

Aus der (1,3)-Komponente folgt:

$$[(\mathbf{R}_e \Phi)^\cdot (\mathbf{R}_e \Phi)^T]_{(1,3)} = \frac{\dot{\gamma}}{2} - \frac{1}{4} (\dot{\gamma}_p^{(1)} + \dot{\gamma}_p^{(2)}) \quad . \quad (9.25)$$

Annahme: $[(\mathbf{R}_e \Phi)^\cdot (\mathbf{R}_e \Phi)^T]_{(1,3)} \neq 0$

Dies würde eine weitere Drehung der Gleitebenen bedeuten, insbesondere $\theta \neq 0^\circ$. Damit ist aber in Gleichung (9.17) $\sin \theta \cos \theta \neq 0$. Um Gleichung (9.17) dennoch zu erfüllen, muß $\dot{\gamma}_p^{(1)} = \dot{\gamma}_p^{(2)}$ sein.

Dies ergibt in Gleichung (9.18) $\dot{\gamma} = 0$, was im Widerspruch zur Voraussetzung $\dot{\gamma} \neq 0$ steht.

\Rightarrow Damit muss $[(\mathbf{R}_e \Phi)^\cdot (\mathbf{R}_e \Phi)^T]_{(1,3)} = 0$ sein, und die Gleitsysteme drehen sich während der Deformation nicht weiter.

Aus Gleichung (9.25) folgt damit:

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2} (\dot{\gamma}_p^{(1)} + \dot{\gamma}_p^{(2)}) \quad \text{für} \quad \theta = 0^\circ \quad (9.26)$$

Mit der Gleichung (9.22) folgt für $\theta = 0^\circ$, daß $\dot{\gamma}_p^{(1)} = 2\dot{\gamma}$ und $\dot{\gamma}_p^{(2)} = 0$ sind.

9.3.2 Einfache Scherung beim elastisch-plastischen Körper

Der Geschwindigkeitsgradient bei einfacher Scherung mit symmetrischer Verzerrungsgeschwindigkeit und antisymmetrischem Wirbeltensor ist durch

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{\gamma} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{\gamma} \\ 0 & 0 & 0 \\ \dot{\gamma} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{\gamma} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dot{\gamma} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.27)$$

mit $\dot{\gamma} \neq 0$ gegeben.

Annahme: Die Rotation der Vektoren $\mathbf{s}^{(i)}$ und $\mathbf{n}^{(i)}$ kommt zum Stillstand. Die Evolutionsgleichungen für $\mathbf{s}^{(i)}$ und $\mathbf{n}^{(i)}$ lauten:

$$\dot{\mathbf{s}}^{(i)} = (\mathbf{R}_e \Phi)^\cdot (\mathbf{R}_e \Phi)^T \mathbf{s}^{(i)} \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{n}}^{(i)} = (\mathbf{R}_e \Phi)^\cdot (\mathbf{R}_e \Phi)^T \mathbf{n}^{(i)}$$

mit

$$(\mathbf{R}_e \Phi)^\cdot (\mathbf{R}_e \Phi)^T = \mathbf{W} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^2 \dot{\gamma}_p^{(i)} (\mathbf{s}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} - \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{s}^{(i)}) \quad . \quad (9.28)$$

\mathbf{W} ist vorgegeben und konstant.

Wenn die Rotation der Vektoren $\mathbf{s}^{(i)}$ und $\mathbf{n}^{(i)}$ zum Stillstand kommt, muß $(\mathbf{R}_e \Phi)^\cdot (\mathbf{R}_e \Phi)^T = \mathbf{0}$ gelten.

Damit $(\mathbf{R}_e \Phi)^\cdot (\mathbf{R}_e \Phi)^T = \mathbf{0}$ und somit $\mathbf{s}^{(i)}$, $\mathbf{n}^{(i)}$ konstant bleiben, muß $\dot{\gamma}_p^{(i)}$ ebenfalls konstant bleiben.

$$\dot{\gamma}_p^{(i)} = \frac{\tau^{(i)}}{|\tau^{(i)}|} \frac{\langle |\tau^{(i)}| - k_0 \rangle^m}{\eta} \stackrel{!}{=} \text{const} \quad (9.29)$$

$\Rightarrow \tau^{(i)}$ muß ebenfalls konstant bleiben.

Aus $\tau^{(i)} = \mathbf{s}^{(i)} \cdot \mathbf{S}[\mathbf{n}^{(i)}]$ und den Bedingungen, daß $\tau^{(i)}, \mathbf{n}^{(i)}, \mathbf{s}^{(i)}$ konstant sein sollen, folgt, daß der Spannungstensor \mathbf{S} ebenfalls konstant sein muß.

Mit der weiteren Annahme eines isotropen Elastizitätsgesetzes

$$\mathbf{S} = C_1 \mathbf{A}_e + C_2 Sp(\mathbf{A}_e) \mathbf{I} \quad (9.30)$$

muß auch \mathbf{A}_e konstant sein.

Damit reduziert sich die Beziehung

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_e + \mathbf{D}_p = \overset{\Delta}{\mathbf{A}}_e + \overset{\Delta}{\mathbf{A}}_p$$

zu

$$\mathbf{D} = \mathbf{L}^T \mathbf{A}_e + \mathbf{A}_e \mathbf{L} + \overset{\Delta}{\mathbf{A}}_p \quad . \quad (9.31)$$

$\overset{\Delta}{\mathbf{A}}_p$ lautet in der Momentankonfiguration

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_p = \overset{\Delta}{\mathbf{A}}_p &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^2 \dot{\gamma}_p^{(i)} (\mathbf{s}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} + \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{s}^{(i)}) \\ &= \frac{\dot{\gamma}_p^{(1)} - \dot{\gamma}_p^{(2)}}{4} \begin{pmatrix} 2 \sin \theta \cos \theta & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit lautet die Gleichung $\mathbf{D} = \mathbf{L}^T \mathbf{A}_e + \mathbf{A}_e \mathbf{L} + \overset{\Delta}{\mathbf{A}}_p$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\dot{\gamma}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \dot{\gamma} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{A}_{e11} & \mathbf{A}_{e12} & \mathbf{A}_{e13} \end{pmatrix} + \dot{\gamma} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{A}_{e11} \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{e21} \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{e31} \end{pmatrix} \\ &+ \frac{\dot{\gamma}_p^{(1)} - \dot{\gamma}_p^{(2)}}{4} \begin{pmatrix} 2 \sin \theta \cos \theta & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9.32)$$

Aus der (1,1)-Komponente folgt:

$$0 = (\dot{\gamma}_p^{(1)} - \dot{\gamma}_p^{(2)}) \cos \theta \sin \theta \quad (9.33)$$

Aus der (3,3)-Komponente folgt:

$$0 = \dot{\gamma}(\mathbf{A}_{e13} + \mathbf{A}_{e31}) - \frac{1}{2}(\dot{\gamma}_p^{(1)} - \dot{\gamma}_p^{(2)}) \cos \theta \sin \theta \quad (9.34)$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich:

$$0 = \dot{\gamma}(\mathbf{A}_{e13} + \mathbf{A}_{e31}) \quad . \quad (9.35)$$

Dies führt auf die beiden Widersprüche, daß entweder $\dot{\gamma} = 0$ ist, was aber ausgeschlossen war, oder $\mathbf{A}_{e13} = -\mathbf{A}_{e31}$, d.h. \mathbf{A}_e antisymmetrisch wäre, was auch falsch ist.

\Rightarrow Die Annahme, daß die Rotation der Gleitebenen zum Stillstand kommt, ist falsch.

9.4 Rotation von 12 Gleitebenen im kfz Gitter

9.4.1 Modellrechnungen ohne Kopplung

Hier wird nun das volle dreidimensionale Modell mit kubischer Symmetrie im Elastizitätsgesetz und in der kinematischen Verfestigung verwendet.

Es werden folgende Materialparameter verwendet:

C_1^e	=	170000	MPa	C_1^k	=	2000	MPa
C_2^e	=	124000	MPa	C_2^k	=	2000	MPa
C_3^e	=	76000	MPa	C_3^k	=	1600	MPa
k_0	=	150	MPa	b	=	1E-5	
m	=	3.0		λ	=	0.1	
η	=	20000	(MPa) ^m s				
$\dot{\gamma}$	=	0.1	s ⁻¹				

Tabelle 9.2: Tabelle der Materialparameter für kubisches Kristallsystem

Zuerst wird die Fließgrenze k_0 konstant gelassen und die kinematische Verfestigung abgeschaltet.

Ergebnis:

Als Ergebnis erhält man eine fortlaufende Rotation der Achsen im Elastizitätsgesetz und einen daraus resultierenden periodischen Spannungsverlauf. Man erhält die gleiche Spannung σ_{13} , wenn θ_e um 90° weitergedreht ist.

Das Gitter rotiert im Wesentlichen mit dem antisymmetrischen Anteil des Geschwindigkeitsgradienten ($\frac{d}{dt}(\mathbf{Re}\Phi) = \mathbf{W}(\mathbf{Re}\Phi)$) und kommt nicht zum Stillstand. Der Spin der plastischen Deformation führt zu keiner Stabilisierung.

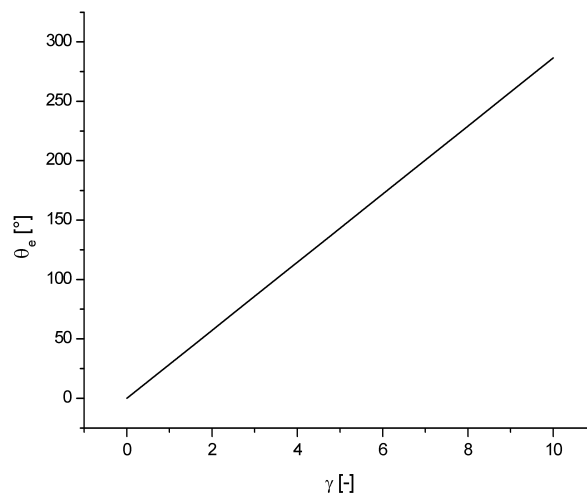


Abbildung 9.9: Winkel der Gitterrotation θ_e bei einfacher Scherung

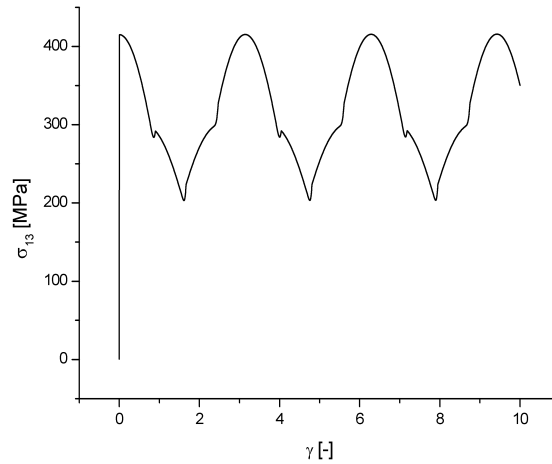
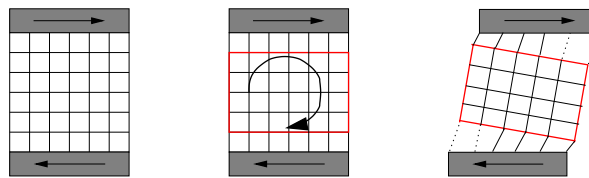


Abbildung 9.10: Spannungsverlauf von σ_{13} , konstante Fließgrenze

Diese fortlaufende Rotation des Gitters wird aber für Einkristalle in der Natur bei Scherung nicht beobachtet.



An der Halterung würden Bindungen abreißen und es dadurch zum Bruch des Materials kommen.

Als nächstes wird eine Rechnung mit konstanter Fließgrenze k_0 und eingeschalteter kinematischer Verfestigung durchgeführt.

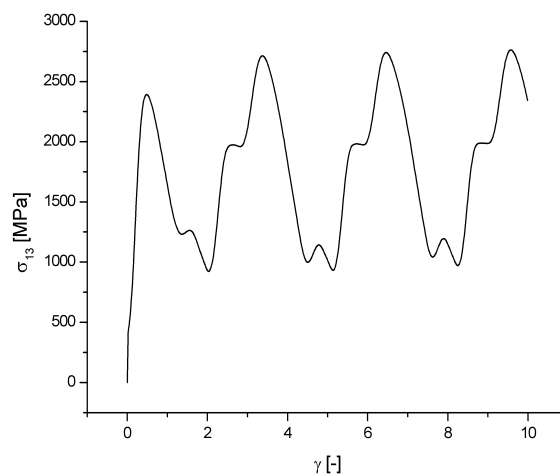


Abbildung 9.11: Spannungsverlauf von σ_{13} bei 12 Gleitsystemen mit eingeschalteter kinematischer Verfestigung

Man sieht erneut einen periodischen Spannungsverlauf und somit keine Stabilisierung der Rotation.

Auf den folgenden Bildern erkennt man den Verlauf der kinematischen Verfestigung $\xi^{(i)}$ in den verschiedenen Gleitsystemen für dieses Rechenbeispiel:

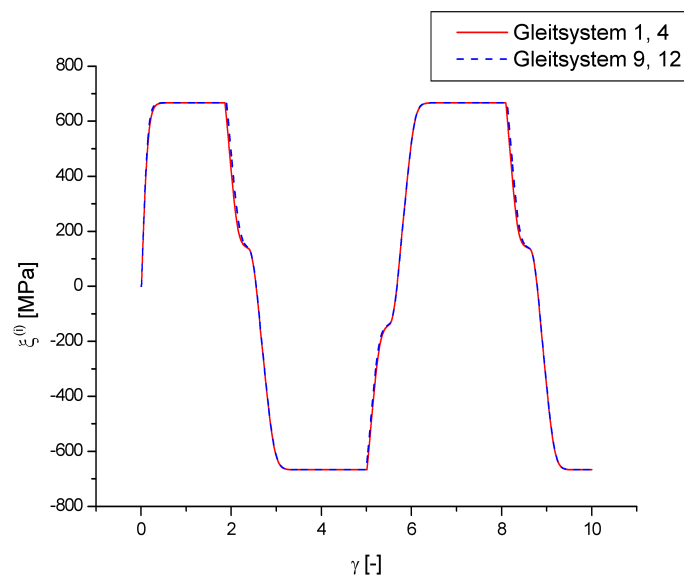


Abbildung 9.12: Kinematische Verfestigung in den Gleitsystemen 1, 4, 9, 12

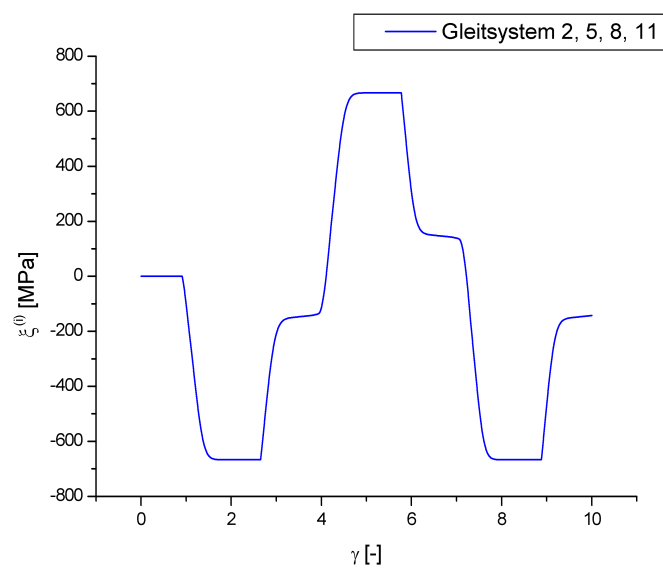


Abbildung 9.13: Kinematische Verfestigung in den Gleitsystemen 2, 5, 8, 11

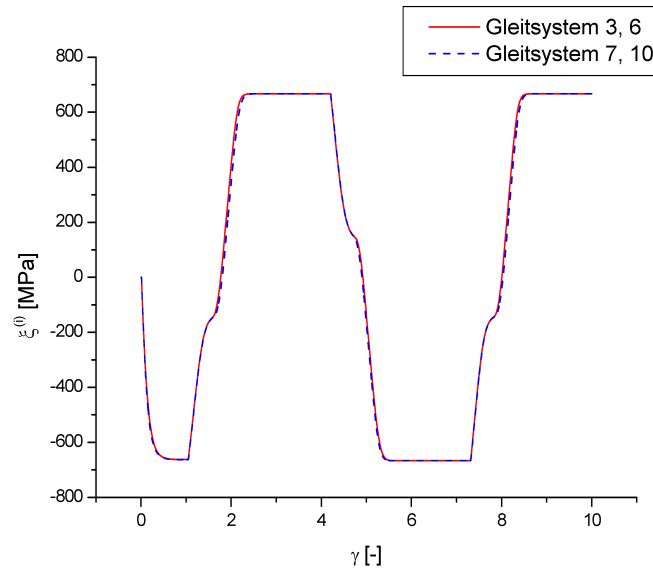


Abbildung 9.14: Kinematische Verfestigung in den Gleitsystemen 3, 6, 7, 10

Auf der Abszisse ist die Scherung γ und auf der Ordinate die kinematische Verfestigung $\xi^{(i)}$ aufgetragen.

Entscheidend ist folgendes:

Die kinematische Verfestigung ist in den einzelnen Gleitsystemen *verschieden*.

Leider werden von den einzelnen kinematischen Verfestigungen keine asymptotischen Grenzwerte erreicht (die kinematischen Verfestigungen verlaufen periodisch), und daher ist mit keiner Stabilisierung der Gitterrotation zu rechnen.

Idee:

Die Rotation des Gitters kann stabilisiert werden, falls die Verfestigung in einigen Gleitsystemen deutlich geringer wäre, als in anderen und somit das plastische Fließen ausschließlich in den weniger verfestigten Gleitsystemen erfolgen würde. Dieser Zustand darf sich im Laufe der Deformation nicht weiter ändern.

Damit muß das bisherige Modell so erweitert werden, daß die Verfestigung in den einzelnen Gleitebenen verschieden wird und asymptotische Grenzwerte erreicht.

Bis jetzt wurde nur eine konstante Fließgrenze und eine sich entwickelnde kinematische Verfestigung im vorgestellten Einkristallmodell behandelt. Dadurch ergaben sich zwar Gleitsysteme, die eine geringere Verfestigung als andere aufwiesen, dieser Zustand blieb aber nicht stabil, sondern die einzelnen Gleitsysteme wechselten sich mit der Verfestigung ab (siehe Bilder (9.12)-(9.14)).

Als neue Idee wird nun eine *Kopplung zwischen den Gleitebenen* zugelassen, sodaß Verfestigungseffekte einer Gleitebene auf die Verfestigung einer anderen Gleitebene Einfluß haben (Latente Verfestigung).

9.4.2 Kopplung in der isotropen Verfestigung

Idee zur Beschreibung der isotropen Verfestigung:

Beim Durchschneiden der im Material isotrop verteilten Versetzungen treten kurzreichweitige Wechselwirkungen auf, die Energie im Gitter speichern können. Daher ist es sinnvoll, die Freie Energiefunktion um einen Anteil ψ_{is} zu erweitern, der diese Energie in der isotropen Verfestigung beschreibt. Um den isotropen Charakter hervorzuheben, soll ψ_{is} von einer skalaren Verzerrung, r genannt, abhängen.

$$\psi = \psi_e + \psi_{kin} + \psi_{is} \quad (9.36)$$

Kopplung in der freien Energiefunktion:

Sei $q^{(\alpha\beta)}$ eine (12x12)-Kopplungsmatrix der Form

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & q\mathbf{A} & q\mathbf{A} & q\mathbf{A} \\ q\mathbf{A} & \mathbf{A} & q\mathbf{A} & q\mathbf{A} \\ q\mathbf{A} & q\mathbf{A} & \mathbf{A} & q\mathbf{A} \\ q\mathbf{A} & q\mathbf{A} & q\mathbf{A} & \mathbf{A} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.37)$$

wobei der Parameter $q > 1.0$ die sogenannte *Latente Verfestigung* beschreibt und bei 1.4 liegt (siehe hierzu Kocks [29]).

Im Nachfolgenden wird über doppelt auftretende Indizes summiert.

$k^{(\alpha)}$ sei die isotrope Verfestigung, die sich nach

$$k^{(\alpha)} = k_0^{(\alpha)} + R^{(\alpha)} \quad (9.38)$$

aus einem festen Anteil $k_0^{(\alpha)}$ und einem veränderlichen Anteil $R^{(\alpha)}$ zusammensetzt. Hierbei soll sich $R^{(\alpha)}$ aus dem Potential $\Psi^{(is)}$ herleiten lassen:

$$R^{(\alpha)} = \frac{\partial \psi_{is}}{\partial r^{(\alpha)}} \quad (9.39)$$

Hierbei ist $r^{(\alpha)}$ die thermodynamisch Konjugierte zu $R^{(\alpha)}$.

Der isotrope Anteil der freien Energiefunktion ψ_{is} möge die Form

$$\rho_R \psi_{is} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \zeta q^{(\alpha\beta)} r^{(\alpha)} r^{(\beta)} \quad (9.40)$$

haben ($\zeta > 0$).

Damit ist

$$R^{(\alpha)} = \frac{\partial \psi_{is}}{\partial r^{(\alpha)}} = \zeta q^{(\alpha\beta)} r^{(\beta)} \quad (9.41)$$

Aus der Dissipationsungleichung

$$\hat{\mathbf{P}} \cdot (\hat{\mathbf{L}}_p - \dot{\mathbf{\Phi}} \mathbf{\Phi}^T) - \rho_R (\dot{\psi}_{kin} + \dot{\psi}_{is}) \geq 0 \quad (9.42)$$

folgt dann:

$$\sum_{i=1}^n \left\{ (\tau^{(i)} - \xi^{(i)}) \dot{\gamma}_p^{(i)} - \frac{\partial \psi_{is}}{\partial r^{(i)}} \dot{r}^{(i)} \right\} \geq 0 \quad (9.43)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \left\{ (\tau^{(i)} - \xi^{(i)}) \dot{\gamma}_p^{(i)} - R^{(i)} \dot{r}^{(i)} \right\} \geq 0 \quad (9.44)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{(\tau^{(i)} - \xi^{(i)})(\tau^{(i)} - \xi^{(i)})}{|\tau^{(i)} - \xi^{(i)}|} \dot{s}^{(i)} - R^{(i)} \dot{r}^{(i)} \right\} \geq 0 \quad (9.45)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \left\{ |\tau^{(i)} - \xi^{(i)}| \dot{s}^{(i)} - R^{(i)} \dot{r}^{(i)} \right\} \geq 0 \quad (9.46)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \left\{ (|\tau^{(i)} - \xi^{(i)}| - k^{(i)} + k^{(i)}) \dot{s}^{(i)} - R^{(i)} \dot{r}^{(i)} \right\} \geq 0 \quad (9.47)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \left\{ (|\tau^{(i)} - \xi^{(i)}| - k^{(i)}) \dot{s}^{(i)} \right\} + \sum_{i=1}^n \left\{ \dot{s}^{(i)} k^{(i)} - R^{(i)} \dot{r}^{(i)} \right\} \geq 0 \quad (9.48)$$

Hinreichende Bedingung zum Lösen von (9.48):

$$\sum_{i=1}^n \left\{ (|\tau^{(i)} - \xi^{(i)}| - k^{(i)}) \dot{s}^{(i)} \right\} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{s}^{(i)} = \frac{\langle |\tau^{(i)} - \xi^{(i)}| - k^{(i)} \rangle^{m^{(i)}}}{\eta^{(i)}} \quad (9.49)$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left\{ \dot{s}^{(i)} k^{(i)} - R^{(i)} \dot{r}^{(i)} \right\} &= \sum_{i=1}^n \left\{ \dot{s}^{(i)} (k_0^{(i)} + R^{(i)}) - R^{(i)} \dot{r}^{(i)} \right\} \geq 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \underbrace{\dot{s}^{(i)} k_0^{(i)}}_{\geq 0} + \sum_{i=1}^n R^{(i)} (\dot{s}^{(i)} - \dot{r}^{(i)}) &\geq 0 \quad . \end{aligned} \quad (9.50)$$

Hinreichende Bedingung für $R^{(i)}(\dot{s}^{(i)} - \dot{r}^{(i)}) \geq 0$ ist:

$$R^{(i)} = \zeta q^{(ij)} r^{(j)} \geq 0 \quad \text{und} \quad \dot{s}^{(i)} - \dot{r}^{(i)} \geq 0 \quad . \quad (9.51)$$

Mit der Annahme für $\dot{r}^{(i)}$

$$\boxed{\dot{r}^{(i)} = (1 - \beta^{(i)} r^{(i)}) \dot{s}^{(i)}} \quad (9.52)$$

ist

$$\dot{s}^{(i)} - \dot{r}^{(i)} = \beta^{(i)} r^{(i)} \dot{s}^{(i)} \geq 0 \quad (9.53)$$

Integration von (9.52) liefert:

$$r^{(i)}(t) = \frac{1 - e^{-\beta^{(i)} s^{(i)}(t)}}{\beta^{(i)}} \geq 0 \quad . \quad (9.54)$$

Damit ist $r^{(i)}(t) \geq 0$ für alle Zeiten und $R^{(i)} = \zeta q^{(ij)} r^{(j)} \geq 0$.

q	$=$	1.4
ζ	$=$	14.0
β	$=$	0.1

Tabelle 9.3: Tabelle der zusätzlichen Materialparameter für Kopplung in der isotropen Verfestigung

In den folgenden 3 Abbildungen sind der Verlauf der isotropen Verfestigung, der Verlauf des Winkels θ_e und der Spannungsverlauf für einfache Scherung gezeigt. Als Startorientierung werden für θ_e die Winkel $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ gewählt.

Ergebnisse:

Isotrope Verfestigung (siehe Abbildung 9.15):

Hier sieht man, abhängig von der Anfangsorientierung, eine Aufspaltung der isotropen Verfestigung der 12 Gleitsysteme in zwei Gruppen. Welche Gleitsysteme durch welche Linie dargestellt werden, wird hier nicht berücksichtigt. Dies bricht nun die Symmetrie des Gleitvermögens in den 12 Gleitsystemen und begünstigt das Gleiten auf den wenig verfestigten Gleitsystemen. Dies ist der Grund, warum nun die Rotation des kubischen Kristalls bei einfacher Scherung zum Stillstand kommt. Damit ist die vorgestellte Idee zur Kopplung in der isotropen Verfestigung vernünftig und sinnvoll.

Gitterrotation θ_e (siehe Abbildung 9.16):

Man sieht recht deutlich, daß alle Winkel der Gitterrotation gegen einen Grenzwert streben und dieser nicht mehr als 90° von der Startorientierung abweicht. Dabei bilden sich zwei Grenzwerte aus: $\sim 25^\circ$ und $\sim 115^\circ$. Dies ist aber materialparameterabhängig und variiert etwas. Wichtig ist nur, dass sich beide Grenzwerte für kubische Symmetrie um 90° unterscheiden.

Spannungsverlauf σ_{13} (siehe Abbildung 9.17):

Die Spannungen laufen asymptotisch gegen einen Grenzwert. Dieser Grenzwert ist für verschiedene Anfangsorientierungen der Anisotropieachsen ($\theta_e = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$) unterschiedlich.

Im Kapitel "Vergleich mit Modellen aus der Literatur" werden weitere Kopplungsmöglichkeiten für die isotrope Verfestigung aufgezeigt.

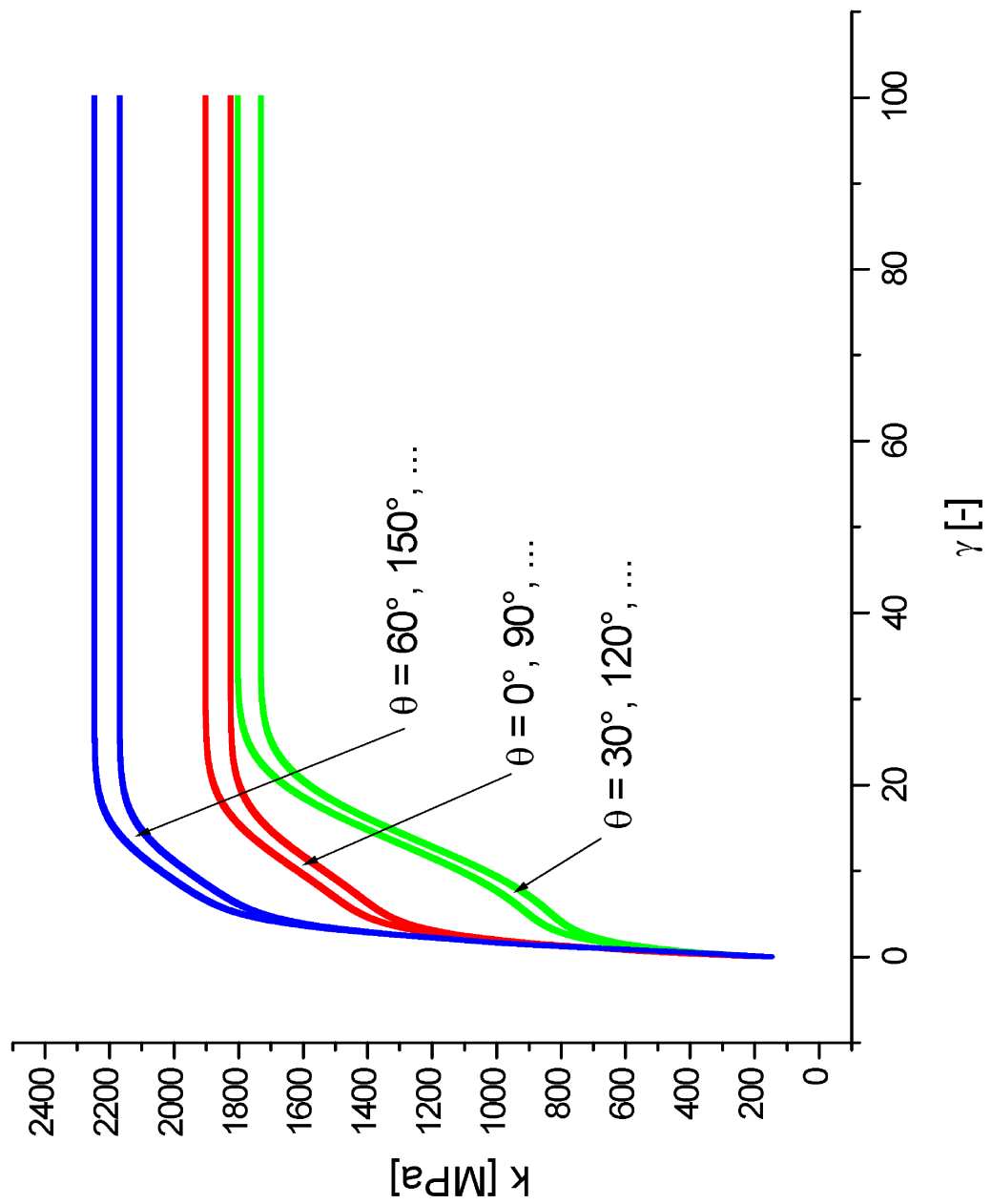


Abbildung 9.15: Verlauf der gekoppelten isotropen Verfestigung

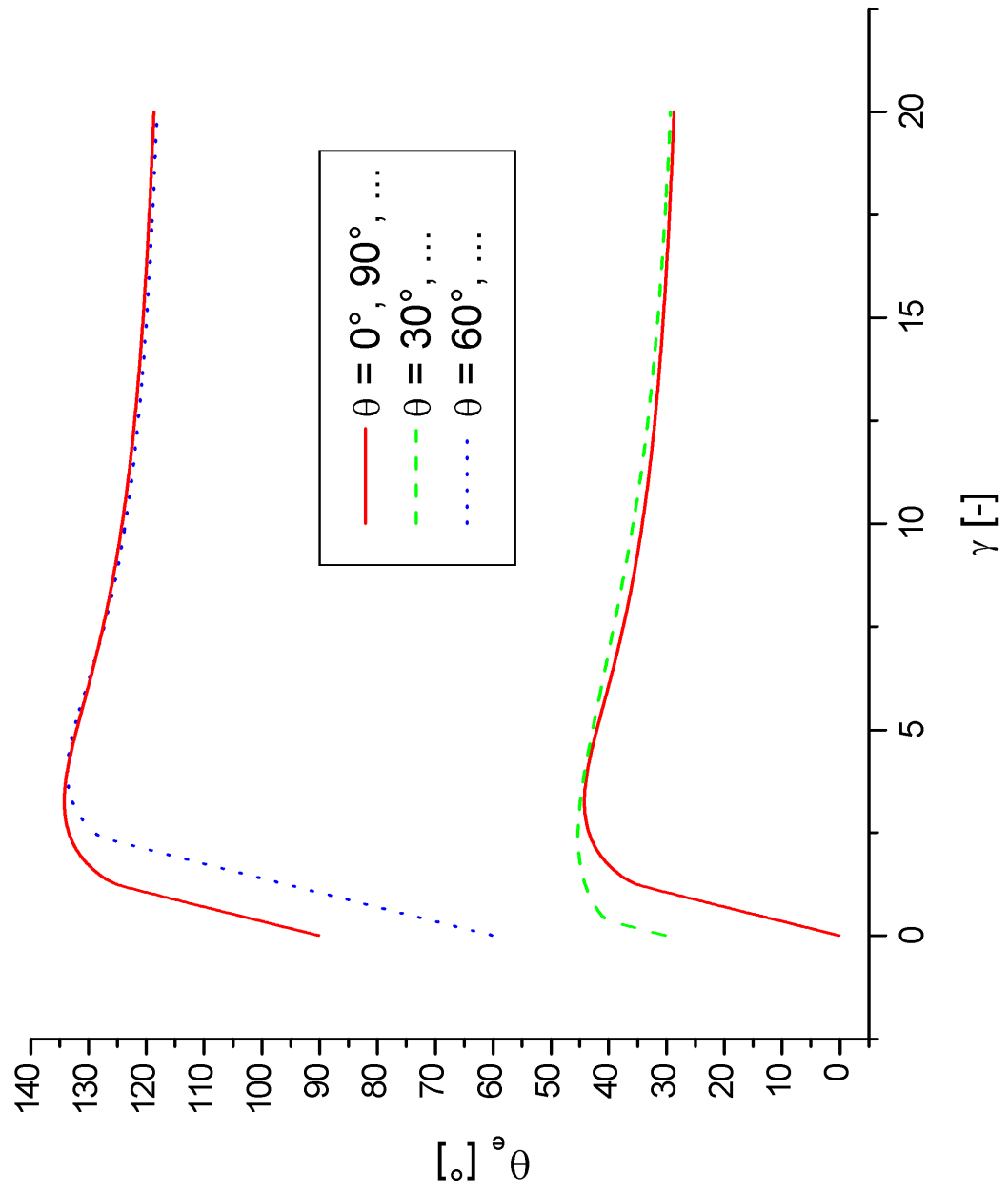


Abbildung 9.16: Drehwinkel θ_e bei Kopplung in der isotropen Verfestigung

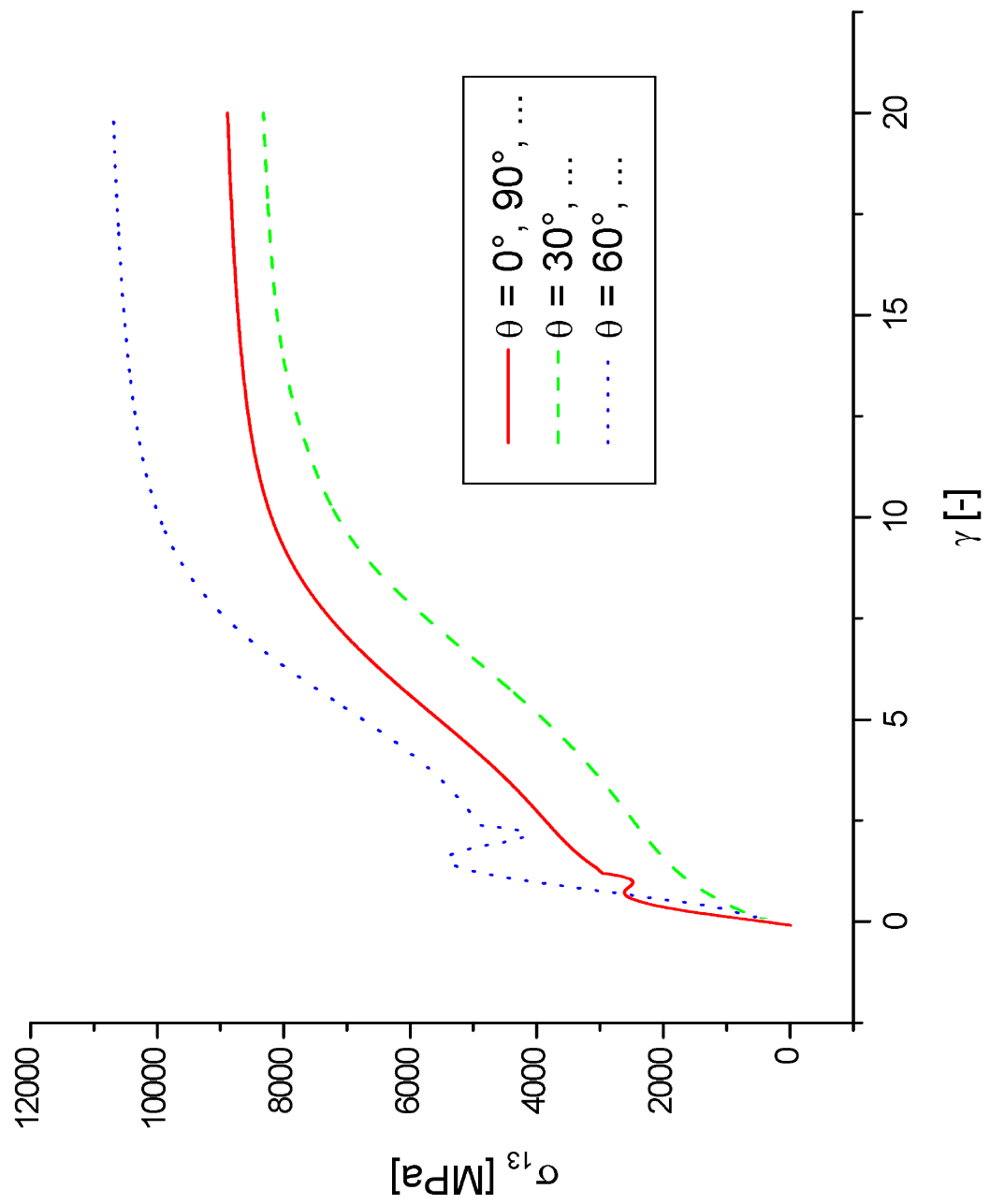


Abbildung 9.17: Spannung σ_{13} bei Kopplung in der isotropen Verfestigung

9.4.3 Kopplung in der kinematischen Verfestigung

Kopplungsmatrix in der kinematischen Verfestigung:

$$q_{kin}^{(ij)} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & q\mathbf{A} & q\mathbf{A} & q\mathbf{A} \\ q\mathbf{A} & \mathbf{B} & q\mathbf{A} & q\mathbf{A} \\ q\mathbf{A} & q\mathbf{A} & \mathbf{B} & q\mathbf{A} \\ q\mathbf{A} & q\mathbf{A} & q\mathbf{A} & \mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & p & p \\ p & 1 & p \\ p & p & 1 \end{pmatrix}.$$

Als Materialparameter wurden $q = 1.4$ und $p = 0.5$ gewählt, um positive Definitheit der Kopplungsmatrix zu gewährleisten.

Verzerrungstensor der kinematischen Verfestigung:

$$\mathbf{\Gamma}_k^{(i)} = -\frac{\gamma_k^{(i)^2}}{2}(\mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)}) + \frac{\gamma_k^{(i)}}{2}(\mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{s}^{(i)} + \mathbf{s}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)}) \quad .$$

Gekoppelte Dehnung:

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}_g^{(i)} = \sum_j \kappa^{(i)} q_{kin}^{(ij)} (\mathbf{Re}\mathbf{\Delta}^{(j)})^T \mathbf{\Gamma}_k^{(j)} (\mathbf{Re}\mathbf{\Delta}^{(j)}) \quad , \quad q_{kin}^{(ij)} : \text{Kopplungsmatrix}, \quad \kappa^{(i)} > 0 \quad . \quad (9.55)$$

Ansatz für den kinematischen Anteil der freien Energiefunktion (für f.c.c. Kristallsystem):

$$\psi_{kin}^{(i)} = \psi_{kin}^{(i)}(\tilde{\mathbf{\Gamma}}_g^{(i)}) = \frac{1}{2}C_1^k I_1^k + C_2^k I_2^k + C_3^k I_3^k \quad (9.56)$$

mit

$$\mathbf{X}^k := \tilde{\mathbf{\Gamma}}_g^{(i)} = \mathbf{\Delta}^{(i)T} \left(\hat{\mathbf{\Gamma}}_g^{(i)} \right) \mathbf{\Delta}^{(i)} \quad (9.57)$$

$$I_1^k = \{ \mathbf{X}_{11}^k \}^2 + \{ \mathbf{X}_{22}^k \}^2 + \{ \mathbf{X}_{33}^k \}^2 \quad (9.58)$$

$$I_2^k = \mathbf{X}_{11}^k \mathbf{X}_{22}^k + \mathbf{X}_{22}^k \mathbf{X}_{33}^k + \mathbf{X}_{33}^k \mathbf{X}_{11}^k \quad (9.59)$$

$$I_3^k = \{ \mathbf{X}_{12}^k \}^2 + \{ \mathbf{X}_{13}^k \}^2 + \{ \mathbf{X}_{23}^k \}^2 \quad . \quad (9.60)$$

Mit der Definition

$$\left(\widetilde{\mathbf{M}}_{rs}^k \right) := \tilde{\mathbf{e}}_r \otimes \tilde{\mathbf{e}}_s \quad (9.61)$$

können die Invarianten $I_1^k - I_3^k$ umgeschrieben werden zu

$$\begin{aligned} I_1^k &= \left(\tilde{\mathbf{\Gamma}}_g^{(i)} \cdot \left(\widetilde{\mathbf{M}}_{11}^k \right) \right)^2 + \left(\tilde{\mathbf{\Gamma}}_g^{(i)} \cdot \left(\widetilde{\mathbf{M}}_{22}^k \right) \right)^2 + \left(\tilde{\mathbf{\Gamma}}_g^{(i)} \cdot \left(\widetilde{\mathbf{M}}_{33}^k \right) \right)^2 \\ I_2^k &= \left(\tilde{\mathbf{\Gamma}}_g^{(i)} \cdot \left(\widetilde{\mathbf{M}}_{11}^k \right) \right) \left(\tilde{\mathbf{\Gamma}}_g^{(i)} \cdot \left(\widetilde{\mathbf{M}}_{22}^k \right) \right) + \left(\tilde{\mathbf{\Gamma}}_g^{(i)} \cdot \left(\widetilde{\mathbf{M}}_{22}^k \right) \right) \left(\tilde{\mathbf{\Gamma}}_g^{(i)} \cdot \left(\widetilde{\mathbf{M}}_{33}^k \right) \right) + \\ &\quad \left(\tilde{\mathbf{\Gamma}}_g^{(i)} \cdot \left(\widetilde{\mathbf{M}}_{33}^k \right) \right) \left(\tilde{\mathbf{\Gamma}}_g^{(i)} \cdot \left(\widetilde{\mathbf{M}}_{11}^k \right) \right) \\ I_3^k &= \left(\tilde{\mathbf{\Gamma}}_g^{(i)} \cdot \left(\widetilde{\mathbf{M}}_{12}^k \right) \right)^2 + \left(\tilde{\mathbf{\Gamma}}_g^{(i)} \cdot \left(\widetilde{\mathbf{M}}_{13}^k \right) \right)^2 + \left(\tilde{\mathbf{\Gamma}}_g^{(i)} \cdot \left(\widetilde{\mathbf{M}}_{23}^k \right) \right)^2 \quad . \end{aligned} \quad (9.62)$$

Translationstensor der kinematischen Verfestigung:

$$\boldsymbol{\xi}^{(i)} = \sum_j q_{kin}^{(ij)} \left(\mathbf{1} - 2\mathbf{\Gamma}_k^{(i)} \right) (\mathbf{Re}\mathbf{\Delta}^{(i)}) \frac{\partial \psi_{kin}^{(j)}}{\partial \tilde{\mathbf{\Gamma}}_g^{(j)}} (\mathbf{Re}\mathbf{\Delta}^{(i)})^T \quad . \quad (9.63)$$

Skalare kinematische Verfestigung im (i) -ten Gleitsystem:

$$\xi^{(i)} = \mathbf{s}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\xi}^{(i)}[\mathbf{n}^{(i)}] \quad .$$

Definition der gekoppelte Spannung der kinematischen Verfestigung:

$$\mathbf{Z}_g^{(i)} := \sum_j q_{kin}^{(ij)} (\mathbf{Re}\boldsymbol{\Delta}^{(i)}) \frac{\partial \psi_{kin}^{(j)}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_g^{(j)}} (\mathbf{Re}\boldsymbol{\Delta}^{(i)})^T \quad . \quad (9.64)$$

Evolutionsgleichung für $\dot{\gamma}_k^{(i)}$:

$$\dot{\gamma}_k^{(i)} = \dot{\gamma}_p^{(i)} - \dot{s}^{(i)} b^{(i)} \left\{ -\gamma_k^{(i)} \mathbf{n}^{(i)} \cdot \mathbf{Z}_g^{(i)}[\mathbf{n}^{(i)}] + \mathbf{s}^{(i)} \cdot \mathbf{Z}_g^{(i)}[\mathbf{n}^{(i)}] \right\} \quad .$$

Evolutionsgleichungen für die Drehtensoren $(\mathbf{R}_e\boldsymbol{\Delta}^{(i)})$

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &:= \mathbf{W} - \frac{1}{2n} \sum_{a=1}^n \dot{\gamma}_p^{(a)} (\mathbf{s}^{(a)} \otimes \mathbf{n}^{(a)} - \mathbf{n}^{(a)} \otimes \mathbf{s}^{(a)}) \\ (\mathbf{R}_e\boldsymbol{\Delta}^{(i)})^\cdot &= \left\{ \mathbf{K} + \lambda_\Delta \dot{s}^{(i)} \left(\boldsymbol{\Gamma}_k^{(i)} \mathbf{Z}_g^{(i)} - \mathbf{Z}_g^{(i)} \boldsymbol{\Gamma}_k^{(i)} \right) \right\} (\mathbf{R}_e\boldsymbol{\Delta}^{(i)}) \quad . \end{aligned}$$

Beweis der thermodynamischen Konsistenz:

Die Dehnungen $\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_k^{(i)}$ werden in der Referenzkonfiguration mit der Kopplungsmatrix q_{kin} gekoppelt:

$$\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_g^{(i)} := \sum_j q_{kin}^{(ij)} \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_k^{(j)} = \sum_j q_{kin}^{(ij)} (\boldsymbol{\Delta}^{(j)})^T \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_k^{(j)} \boldsymbol{\Delta}^{(j)} \quad . \quad (9.65)$$

Für den kinematischen Anteil ψ_{kin} der Freien Energiefunktion wird angesetzt:

$$\begin{aligned} \psi_{kin} &= \frac{1}{n} \sum_i \psi_{kin}^{(i)} (\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_g^{(i)}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_i \psi_{kin}^{(i)} \left(\sum_j q^{(ij)} (\boldsymbol{\Delta}^{(j)})^T \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_k^{(j)} \boldsymbol{\Delta}^{(j)} \right) \quad . \end{aligned}$$

Nun wird die zeitliche Ableitung der Funktion $\psi_{kin}^{(i)}(\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_g^{(i)})$ berechnet:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_{kin}^{(i)} &= \frac{\partial \psi_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_g^{(i)}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\sum_j q^{(ij)} \left((\boldsymbol{\Delta}^{(j)})^T \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_k^{(j)} \boldsymbol{\Delta}^{(j)} \right) \right) \\ &= \sum_j q^{(ij)} \frac{\partial \psi_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_g^{(i)}} \cdot \left((\dot{\boldsymbol{\Delta}}^{(j)})^T \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_k^{(j)} \boldsymbol{\Delta}^{(j)} + (\boldsymbol{\Delta}^{(j)})^T \dot{\hat{\boldsymbol{\Gamma}}}_k^{(j)} \boldsymbol{\Delta}^{(j)} + (\boldsymbol{\Delta}^{(j)})^T \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_k^{(j)} \dot{\boldsymbol{\Delta}}^{(j)} \right) \quad . \end{aligned}$$

Nebenrechnung ($\frac{\partial \psi_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_g^{(i)}}$ und $\hat{\Gamma}_k^{(i)}$ sind symmetrisch):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \psi_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_g^{(i)}} \cdot \left((\dot{\Delta}^{(j)})^T \hat{\Gamma}_k^{(j)} \Delta^{(j)} + (\Delta^{(j)})^T \hat{\Gamma}_k^{(j)} \dot{\Delta}^{(j)} \right) \\
&= Sp \left(\frac{\partial \psi_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_g^{(i)}} \left((\dot{\Delta}^{(j)})^T \hat{\Gamma}_k^{(j)} \Delta^{(j)} \right)^T + \left(\frac{\partial \psi_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_g^{(i)}} \right)^T (\Delta^{(j)})^T \hat{\Gamma}_k^{(j)} \dot{\Delta}^{(j)} \right) \\
&= Sp \left(\frac{\partial \psi_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_g^{(i)}} (\Delta^{(j)})^T \hat{\Gamma}_k^{(j)} \dot{\Delta}^{(j)} + \frac{\partial \psi_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_g^{(i)}} (\Delta^{(j)})^T \hat{\Gamma}_k^{(j)} \dot{\Delta}^{(j)} \right) \\
&= Sp \left(\frac{\partial \psi_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_g^{(i)}} (\Delta^{(j)})^T \hat{\Gamma}_k^{(j)} \dot{\Delta}^{(j)} \underbrace{(\Delta^{(i)})^T \Delta^{(i)}}_1 + \frac{\partial \psi_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_g^{(i)}} (\Delta^{(j)})^T \hat{\Gamma}_k^{(j)} \dot{\Delta}^{(j)} \underbrace{(\Delta^{(i)})^T \Delta^{(i)}}_1 \right) \\
&= 2 Sp \left(\Delta^{(j)} \frac{\partial \psi_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_g^{(i)}} (\Delta^{(j)})^T \hat{\Gamma}_k^{(j)} \dot{\Delta}^{(j)} (\Delta^{(j)})^T \right) \\
&= 2 \hat{\Gamma}_k^{(j)} \Delta^{(j)} \frac{\partial \psi_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_g^{(i)}} (\Delta^{(j)})^T \cdot \dot{\Delta}^{(j)} (\Delta^{(j)})^T
\end{aligned}$$

Damit läßt sich die Ableitung von $\psi_{kin}^{(i)}$ vereinfachen zu:

$$\dot{\psi}_{kin}^{(i)} = \sum_j \left(\underbrace{q^{(ij)} \Delta^{(j)} \frac{\partial \psi_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_g^{(i)}} (\Delta^{(j)})^T \cdot \dot{\hat{\Gamma}}_k^{(j)}}_{Teil A} + 2 \underbrace{q^{(ij)} \hat{\Gamma}_k^{(j)} \Delta^{(j)} \frac{\partial \psi_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_g^{(i)}} (\Delta^{(j)})^T \cdot \dot{\Delta}^{(j)} (\Delta^{(j)})^T}_{Teil B} \right) .$$

Nebenrechnung zu *Teil A*:

$$\begin{aligned}
& \sum_j \left(q^{(ij)} \Delta^{(j)} \frac{\partial \psi_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_g^{(i)}} (\Delta^{(j)})^T \cdot \dot{\hat{\Gamma}}_k^{(j)} \right) \\
&= \sum_j q^{(ij)} \Delta^{(j)} \frac{\partial \psi_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_g^{(i)}} (\Delta^{(j)})^T \cdot \left(\left(\hat{\Gamma}_k^{(j)} \right)^\Delta - \mathbf{L}_p^{(j)} \hat{\Gamma}_k^{(j)} - \hat{\Gamma}_k^{(j)} \mathbf{L}_p^{(j)} \right) \\
&= \sum_j q^{(ij)} \Delta^{(j)} \frac{\partial \psi_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_g^{(i)}} (\Delta^{(j)})^T \cdot \left(\hat{\Gamma}_k^{(j)} \right)^\Delta - 2 \sum_j q^{(ij)} \Delta^{(j)} \frac{\partial \psi_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_g^{(i)}} (\Delta^{(j)})^T \cdot \hat{\Gamma}_k^{(j)} \mathbf{L}_p^{(j)} \\
&= \sum_j q^{(ij)} \Delta^{(j)} \frac{\partial \psi_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_g^{(i)}} (\Delta^{(j)})^T \cdot \left(\hat{\Gamma}_k^{(j)} \right)^\Delta - 2 \sum_j q^{(ij)} \hat{\Gamma}_k^{(j)} \Delta^{(j)} \frac{\partial \psi_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_g^{(i)}} (\Delta^{(j)})^T \cdot \mathbf{L}_p^{(j)}
\end{aligned}$$

Teil A kann nun mit $\left(\hat{\Gamma}_k^{(j)} \right)^\Delta = \left(\hat{\Gamma}_p^{(j)} \right)^\Delta - \left(\hat{\Gamma}_r^{(j)} \right)^\Delta = \hat{\mathbf{D}}_p^{(j)} - \hat{\mathbf{D}}_r^{(j)}$ umgeschrieben werden zu:

$$\begin{aligned}
& \sum_j \left(q^{(ij)} \Delta^{(j)} \frac{\partial \psi_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_g^{(i)}} (\Delta^{(j)})^T \cdot \dot{\hat{\Gamma}}_k^{(j)} \right) \\
&= \sum_j \left(q^{(ij)} \Delta^{(j)} \frac{\partial \psi_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_g^{(i)}} (\Delta^{(j)})^T \cdot \left(\hat{\mathbf{L}}_p^{(j)} - \hat{\mathbf{D}}_r^{(j)} \right) - 2 q^{(ij)} \hat{\Gamma}_k^{(j)} \Delta^{(j)} \frac{\partial \psi_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_g^{(i)}} (\Delta^{(j)})^T \cdot \hat{\mathbf{L}}_p^{(j)} \right) .
\end{aligned}$$

Restungleichung:

$$\underbrace{\sum_i \left(\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(i)} \right) \cdot \left(\hat{\mathbf{L}}_p^{(i)} - \dot{\mathbf{\Phi}} \Phi^T \right)}_{\mathcal{D}_I} + \underbrace{\sum_i \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(i)} \cdot \left(\hat{\mathbf{L}}_p^{(i)} - \dot{\mathbf{\Phi}} \Phi^T \right) - \sum_i \dot{\psi}_{kin}^{(i)}}_{\mathcal{D}_{II}} \geq 0 \quad (9.66)$$

Einsetzen von $\dot{\psi}_{kin}^{(i)}$ in \mathcal{D}_{II} liefert:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{II} &= \sum_i \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(i)} \cdot \left(\hat{\mathbf{L}}_p^{(i)} - \dot{\mathbf{\Phi}} \Phi^T \right) \\ &\quad - \sum_i \sum_j \left(q^{(ij)} \Delta^{(j)} \frac{\partial \psi_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_g^{(i)}} (\Delta^{(j)})^T \cdot \left(\hat{\mathbf{L}}_p^{(j)} - \hat{\mathbf{D}}_r^{(j)} \right) - 2q^{(ij)} \hat{\Gamma}_k^{(j)} \Delta^{(j)} \frac{\partial \psi_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_g^{(i)}} (\Delta^{(j)})^T \cdot \hat{\mathbf{L}}_p^{(j)} \right) \\ &\quad - \sum_i \sum_j \left(2q^{(ij)} \hat{\Gamma}_k^{(j)} \Delta^{(j)} \frac{\partial \psi_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_g^{(i)}} (\Delta^{(j)})^T \cdot \dot{\Delta}^{(j)} (\Delta^{(j)})^T \right) \\ &= \sum_j \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(j)} \cdot \hat{\mathbf{L}}_p^{(j)} - \sum_j \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(j)} \cdot \dot{\mathbf{\Phi}} \Phi^T \\ &\quad - \sum_i \sum_j \left(q^{(ij)} \left(1 - 2\hat{\Gamma}_k^{(j)} \right) \Delta^{(j)} \frac{\partial \psi_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_g^{(i)}} (\Delta^{(j)})^T \cdot \hat{\mathbf{L}}_p^{(j)} \right) \\ &\quad + \sum_i \sum_j q^{(ij)} \Delta^{(j)} \frac{\partial \psi_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_g^{(i)}} (\Delta^{(j)})^T \cdot \hat{\mathbf{D}}_r^{(j)} \\ &\quad - \sum_i \sum_j \left(2q^{(ij)} \hat{\Gamma}_k^{(j)} \Delta^{(j)} \frac{\partial \psi_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_g^{(i)}} (\Delta^{(j)})^T \cdot \dot{\Delta}^{(j)} (\Delta^{(j)})^T \right) . \end{aligned}$$

Es liegt nahe, einen Translationstensor der kinematischen Verfestigung $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(i)}$ folgendermaßen zu definieren:

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(j)} := \sum_i q^{(ij)} \left(1 - 2\hat{\Gamma}_k^{(j)} \right) \Delta^{(j)} \frac{\partial \psi_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_g^{(i)}} (\Delta^{(j)})^T . \quad (9.67)$$

Damit vereinfacht sich Teil II der Restungleichung:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{II} &= - \sum_j \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(j)} \cdot \dot{\mathbf{\Phi}} \Phi^T + \sum_i \sum_j q^{(ij)} \Delta^{(j)} \frac{\partial \psi_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_g^{(i)}} (\Delta^{(j)})^T \cdot \hat{\mathbf{D}}_r^{(j)} \\ &\quad - \sum_i \sum_j 2q^{(ij)} \hat{\Gamma}_k^{(j)} \Delta^{(j)} \frac{\partial \psi_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_g^{(i)}} (\Delta^{(j)})^T \cdot \dot{\Delta}^{(j)} (\Delta^{(j)})^T \end{aligned}$$

und weiter zu $(\dot{\Delta}^{(j)} (\Delta^{(j)})^T)$ ist antisymmetrisch):

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{II} &= \sum_i \sum_j q^{(ij)} \Delta^{(j)} \frac{\partial \psi_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_g^{(i)}} (\Delta^{(j)})^T \cdot \hat{\mathbf{D}}_r^{(j)} \\ &\quad + \sum_i \sum_j q^{(ij)} \left(1 - 2\hat{\Gamma}_k^{(j)} \right) \Delta^{(j)} \frac{\partial \psi_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_g^{(i)}} (\Delta^{(j)})^T \cdot \left(\dot{\Delta}^{(j)} (\Delta^{(j)})^T - \dot{\mathbf{\Phi}} \Phi^T \right) . \end{aligned}$$

Abkürzung der gekoppelten Spannungen:

$$\hat{\mathbf{Z}}_g^{(j)} := \sum_i q^{(ij)} \Delta^{(j)} \frac{\partial \psi_{kin}^{(i)}}{\partial \tilde{\Gamma}_g^{(i)}} (\Delta^{(j)})^T . \quad (9.68)$$

Die Restungleichung lautet nun nach den Abkürzungen (9.67) und (9.68):

$$\sum_i \left(\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(i)} \right) \cdot \left(\hat{\mathbf{L}}_p^{(i)} - \hat{\boldsymbol{\Phi}} \boldsymbol{\Phi}^T \right) + \sum_j \left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(j)} \cdot \left(\dot{\Delta}^{(j)} (\Delta^{(j)})^T - \hat{\boldsymbol{\Phi}} \boldsymbol{\Phi}^T \right) + \hat{\mathbf{Z}}_g^{(j)} \cdot \hat{\mathbf{D}}_r^{(j)} \right) \geq 0 \quad (9.69)$$

Als hinreichende Bedingungen zum Lösen von (9.69) erhält man:

1. Das viskoplastische Fließgesetz:

$$\dot{\gamma}_p^{(i)} = \frac{< |\tau^{(i)} - \xi^{(i)}| - k_0^{(i)} >^{m^{(i)}}}{\eta^{(i)}} \frac{\tau^{(i)} - \xi^{(i)}}{|\tau^{(i)} - \xi^{(i)}|} . \quad (9.70)$$

2. Die Regel für den Plastischen Spin (siehe Kapitel 4.6.2):

$$\dot{\Delta}^{(j)} (\Delta^{(j)})^T - \hat{\boldsymbol{\Phi}} \boldsymbol{\Phi}^T = \hat{\boldsymbol{\Omega}}_e^{(j)} - \hat{\boldsymbol{\Omega}}_k^{(j)} = \lambda_{\Delta}^{(j)} \dot{s}^{(j)} \frac{\partial \hat{\chi}^{(j)}}{\partial \hat{\boldsymbol{\xi}}_A^{(j)}} . \quad (9.71)$$

Für die konvexe Funktion $\hat{\chi}^{(i)}$, die den Nullpunkt enthalten soll, wird als einfache Möglichkeit

$$\hat{\chi}^{(i)}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_A^{(i)}) = \frac{1}{2} \left(\hat{\boldsymbol{\xi}}_A^{(i)} \right)^2 \quad (9.72)$$

gewählt.

Als Evolutionsgleichung für $(\mathbf{Re} \Delta^{(i)})$ ergibt sich dann:

$$\frac{d(\mathbf{Re} \Delta^{(i)})}{dt} = \left\{ \dots + \lambda_{\Delta}^{(i)} \dot{s}^{(i)} \left(\Gamma_k^{(i)} \mathbf{Z}_g^{(i)} - \mathbf{Z}_g^{(i)} \Gamma_k^{(i)} \right) \right\} (\mathbf{Re} \Delta^{(i)}) . \quad (9.73)$$

3. Die Evolutionsgleichung für $\gamma_k^{(i)}$:

$$\hat{\mathbf{Z}}_g^{(i)} \cdot \hat{\mathbf{D}}_r^{(i)} \geq 0 \quad (9.74)$$

Vorgehensweise wie in Kapitel 4.6.3 liefert:

$$\dot{\gamma}_k^{(i)} = \dot{\gamma}_p^{(i)} - \dot{s}^{(i)} b^{(i)} \left\{ -\gamma_k^{(i)} \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \cdot \hat{\mathbf{Z}}_g \hat{\mathbf{n}}^{(i)} + \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{Z}}_g^{(i)} \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \right\} . \quad (9.75)$$

Damit ist die thermodynamische Konsistenz der Kopplung in der kinematischen Verfestigung gezeigt.

λ	=	93000	MPa	C_1^k	=	2000	MPa
μ	=	46500	MPa	C_2^k	=	2000	MPa
				C_3^k	=	1600	MPa
m	=	4.0		η	=	20000	(MPa) m s
q	=	1.4		k_0	=	150	MPa
p	=	0.5					
κ	=	1.0		b	=	0.0015	
λ_Δ	=	0.0001		$\dot{\gamma}$	=	0.01	s $^{-1}$

Tabelle 9.4: Tabelle der Materialparameter für Kopplung in der kinematischen Verfestigung

Die kinematische Verfestigung erreicht mit der Kopplung Grenzwerte, und somit verfestigen sich die verschiedenen Gleitsysteme unterschiedlich. Damit wird die Gitterrotation zum Stillstand kommen.

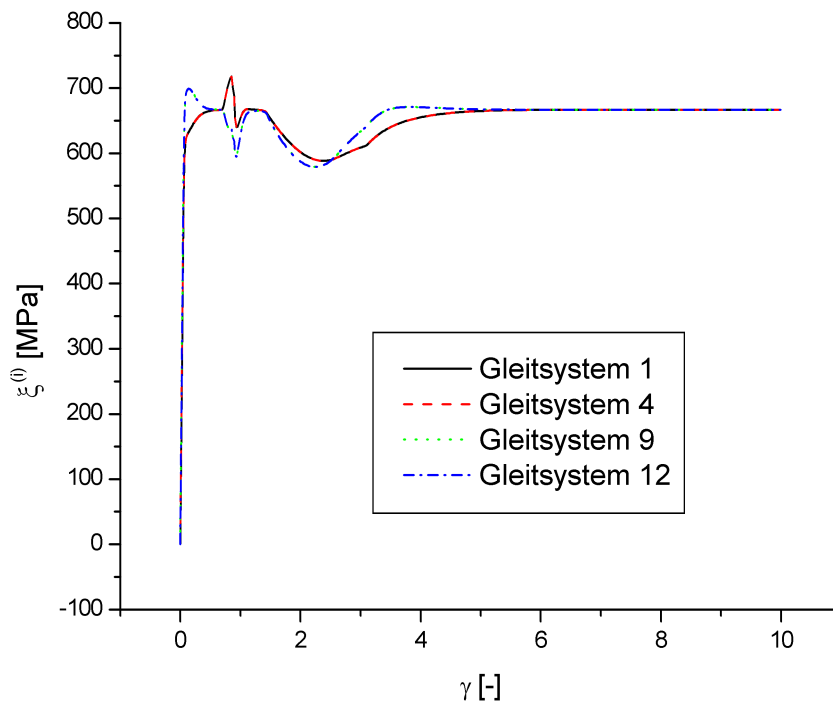


Abbildung 9.18: Kinematische Verfestigungen $\xi^{(i)}$ mit Kopplung für die Gleitsysteme 1, 4, 9, 12

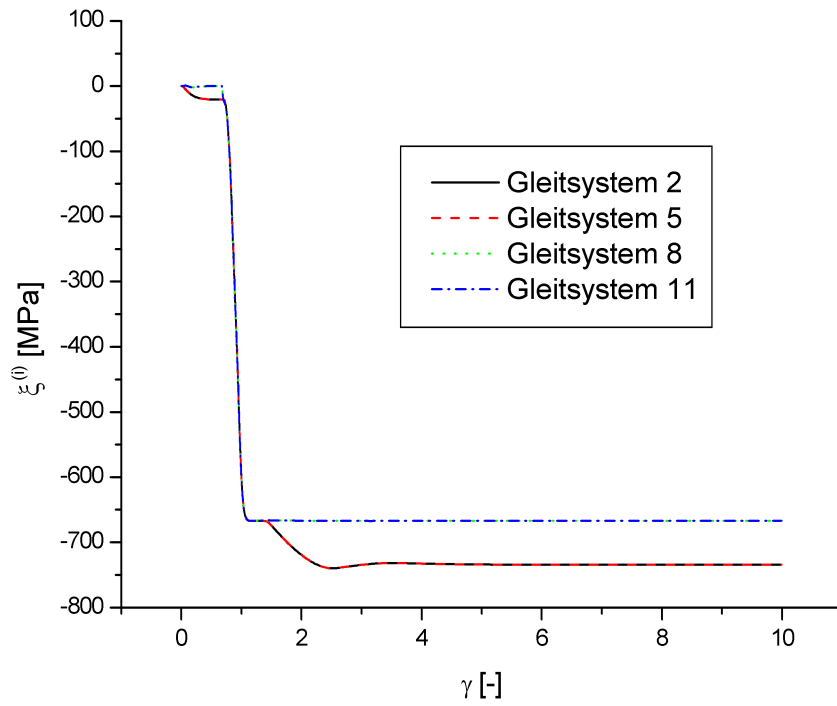


Abbildung 9.19: Kinematische Verfestigungen $\xi^{(i)}$ mit Kopplung für die Gleitsysteme 2, 5, 8, 11

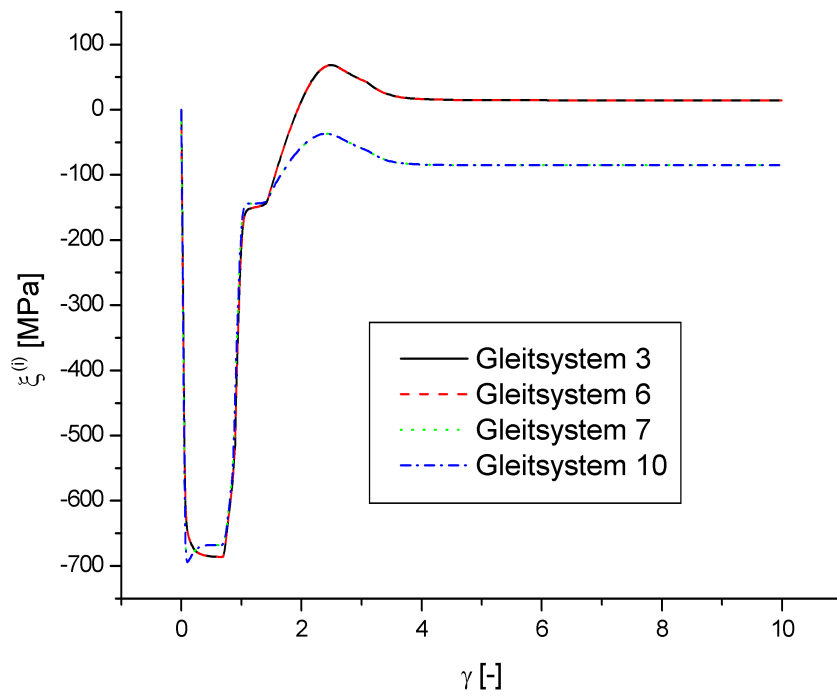


Abbildung 9.20: Kinematische Verfestigungen $\xi^{(i)}$ mit Kopplung für die Gleitsysteme 3, 6, 7, 10

Ergebnisse:

Gitterrotation θ_e (Abbildung 9.21):

Als Anfangsorientierungen werden $\theta_e = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ gewählt. Auch hier sieht man wieder eine Stabilisierung der Gitterrotation. Die Grenzwerte liegen bei $\sim 30^\circ$ und $\sim 120^\circ$.

Auf der Abbildung (9.22) wird der Kopplungsparameter q für die Anfangsorientierung $\theta_e = 0^\circ$ variiert. Die Stabilisierung der Gitterrotation erfolgt bereits bei einem Kopplungsparameter $q = 1.0$.

Dies ist mit der Kopplung in der isotropen Verfestigung alleine **nicht** möglich.

Spannungsverlauf σ_{13} (Abbildung 9.23):

Auch hier sieht man asymptotische Spannungsverläufe für die jeweiligen Anfangsorientierungen $\theta_e = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. Hervorzuheben ist, daß, anders als bei der Kopplung in der isotropen Verfestigung, der Grenzwert für alle Spannungsverläufe identisch ist. Außerdem spielt der Wert der Kopplungskonstanten q für den Spannungsverlauf kaum eine Rolle (Abbildung 9.24).

Hervorzuheben sind die anfänglich auftretenden Spannungsspitzen (bei $\gamma \sim 1$). Diese müssen auftreten, da die kinematische Verfestigung schon sehr schnell eine Brechung der Symmetrie in den 12 Gleitebenen (d.h. unterschiedliche Verfestigung in den Gleitebenen) hervorrufen muß, um auch für eine Kopplungskonstante von $q = 1.0$ eine Stabilisierung der Gitterrotation zu erreichen. Dies war für $q = 1.0$ allein mit der Kopplung in der isotropen Verfestigung nicht erreichbar. Die Kopplung in der kinematischen Verfestigung erhöht die Fließgrenze somit zu Beginn der Scherung auf einigen Gleitebenen sehr schnell, auf anderen wirkt sie sogar entfestigend. Das Gleiten auf den weniger verfestigten Gleitsystemen ist erleichtert, und daher resultiert der starke Spannungsabfall ab einer Scherung von $\gamma = 1$.

Fazit:

Die kinematische Verfestigung bietet hier neue Möglichkeiten, auch für kleinere Kopplungsparameter $1.0 < q < 1.4$ physikalisch sinnvolle Ergebnisse zu bekommen.

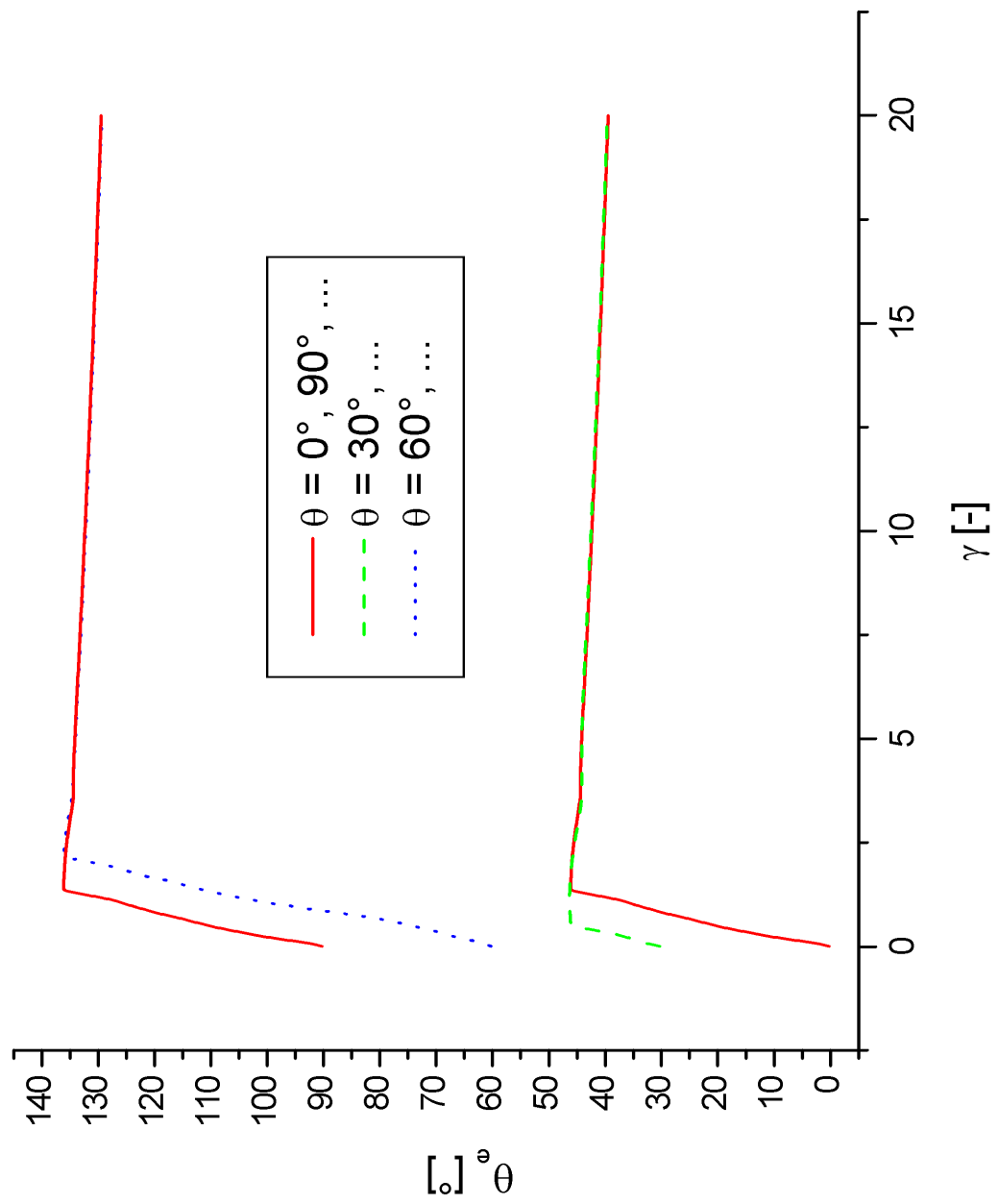


Abbildung 9.21: Winkel θ_e , $q = 1.4$

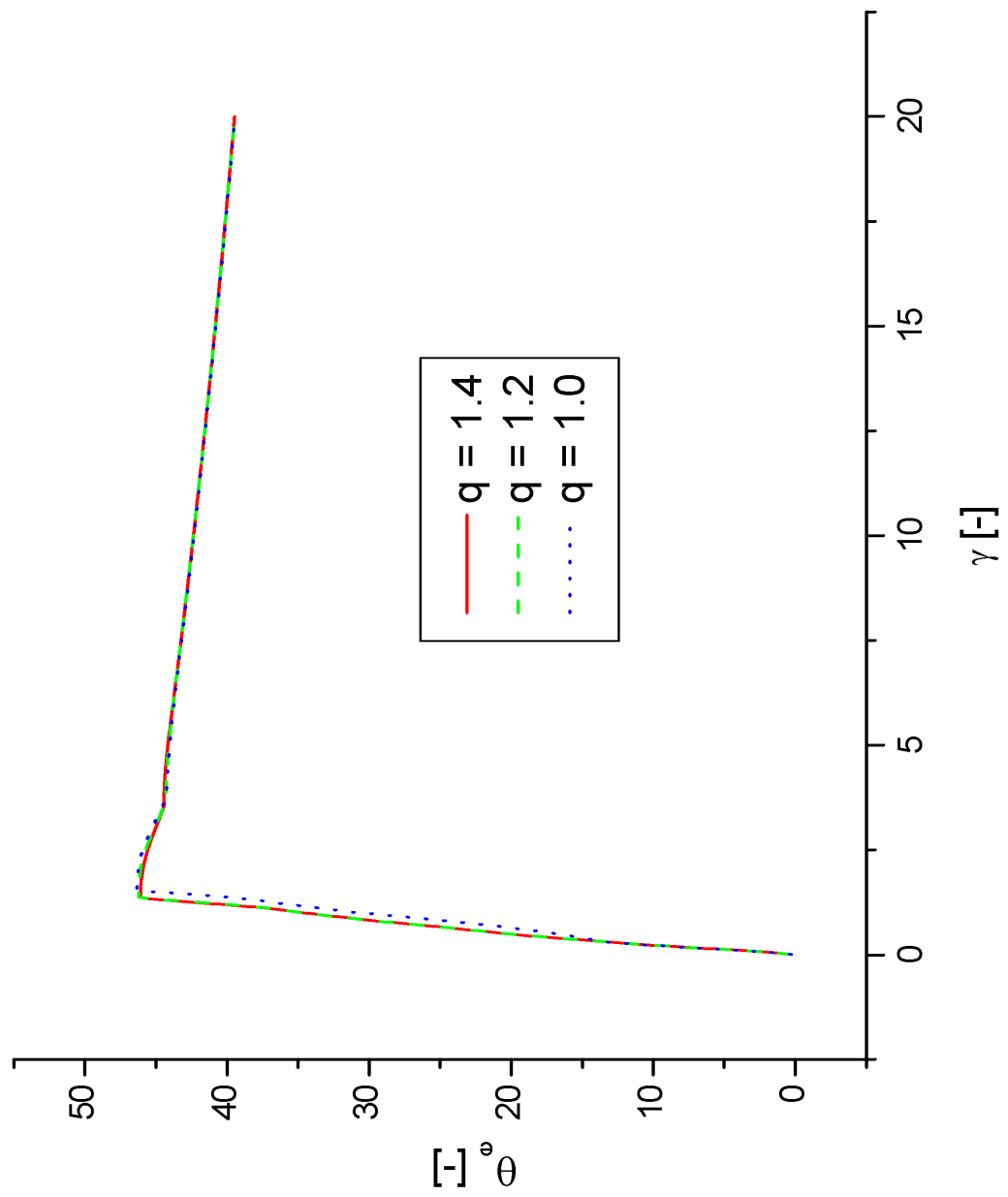


Abbildung 9.22: Winkel θ_e , verschiedene Parameter q

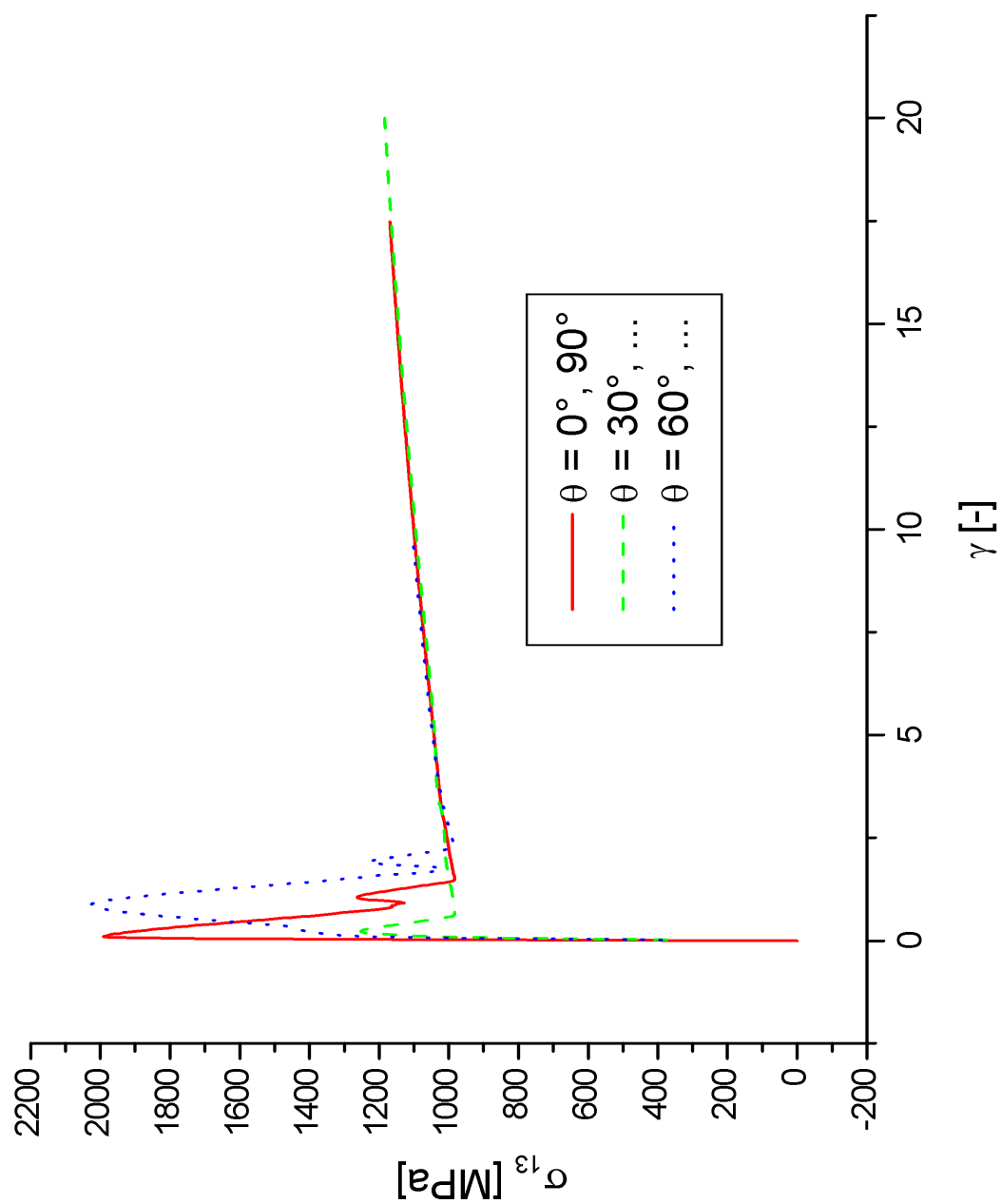


Abbildung 9.23: Spannung σ_{13} , $q = 1.4$

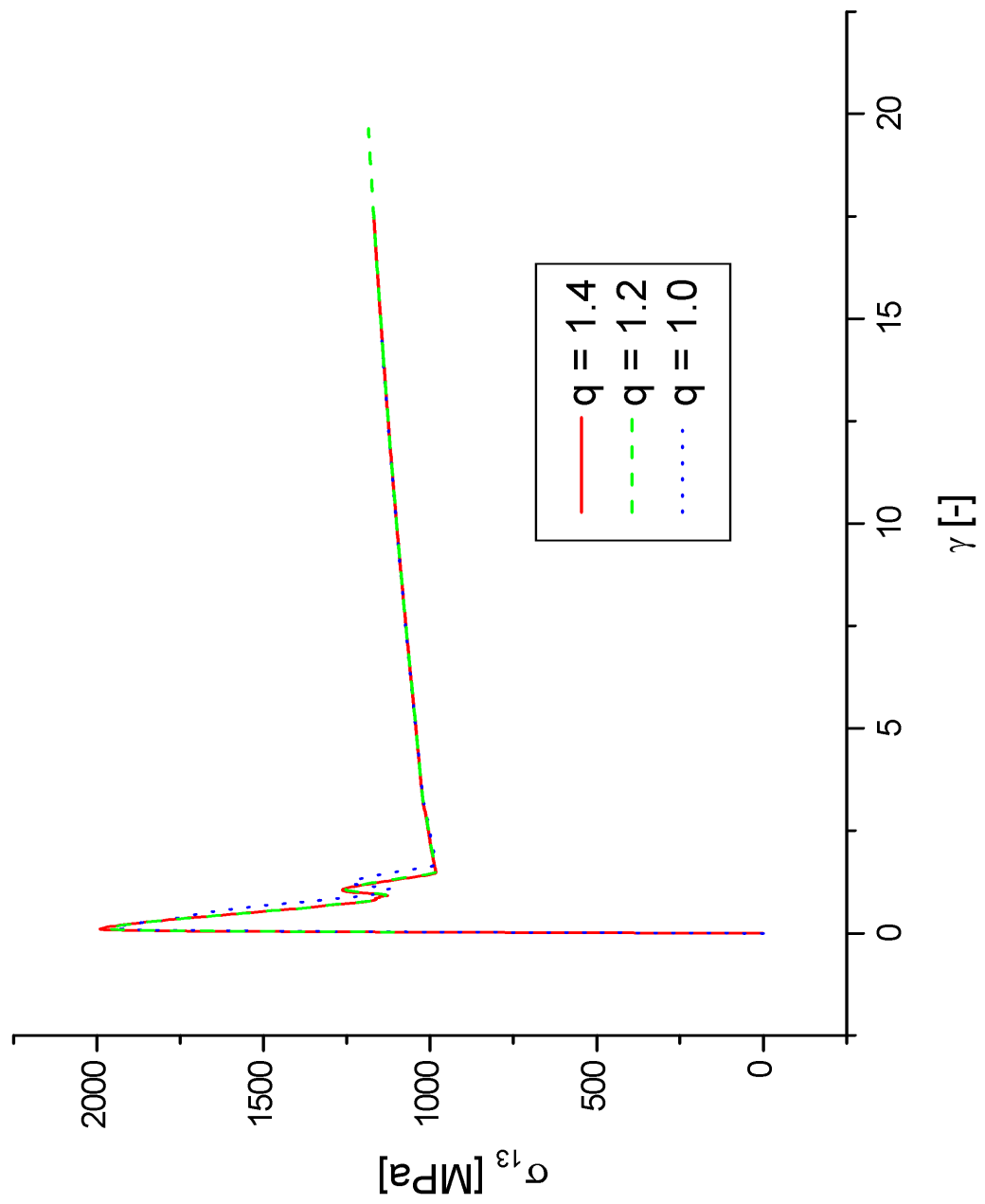


Abbildung 9.24: Spannung σ_{13} , verschiedene Parameter q

9.4.4 Kopplung in der isotropen und kinematischen Verfestigung

Hierbei wird versucht, durch gleichzeitige Kopplung in der isotropen und kinematischen Verfestigung, die anfänglich auftretenden Spannungsspitzen zu vermeiden.

λ	=	93000	MPa	C_1^k	=	2000	MPa
μ	=	46500	MPa	C_2^k	=	2000	MPa
				C_3^k	=	1600	MPa
m	=	4.0		η	=	20000	(MPa) ^m s
q	=	1.4		k_0	=	150	MPa
p	=	0.5					
ζ	=	4		β	=	0.075	
κ	=	1.0		b	=	0.0015	
λ_Δ	=	0.0001		$\dot{\gamma}$	=	0.01	s ⁻¹

Tabelle 9.5: Tabelle der Materialparameter für Kopplung in der isotropen und kinematischen Verfestigung

Ergebnisse:

Gitterrotation θ_e (Abbildungen 9.25 und 9.26):

Als Anfangsorientierungen werden $\theta_e = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ gewählt. Auch hier sieht man wieder eine Stabilisierung der Gitterrotation. Die Grenzwerte liegen bei $\sim 30^\circ$ und $\sim 120^\circ$.

Spannungsverlauf σ_{13} (Abbildungen 9.27 und 9.28):

Leider ist eine Glättung der anfänglichen Spannungsspitzen (für $\gamma \sim 1$) nicht möglich. Die durch die Kopplung in der kinematischen Verfestigung hervorgerufenen Spannungsspitzen müssen am Anfang sein, um eine Stabilisierung der Gitterrotation auch für $q = 1.0$ zu erreichen. Nach einer Scherung von $\gamma = 2.5$ erkennt man einen für die jeweilige Startorientierung $\theta_e = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ unterschiedlichen Spannungsverlauf. Dieser Unterschied wird durch die Kopplung in der isotropen Verfestigung hervorgerufen. Der Vergleich mit dem Kapitel zur Kopplung in der isotropen Verfestigung ergibt eine übereinstimmende Spannungsreihenfolge: Spannungen zur Anfangsorientierung von $\theta_e = 60^\circ$ liegen über denen von $\theta_e = 0^\circ$, gefolgt von denen mit $\theta_e = 30^\circ$.

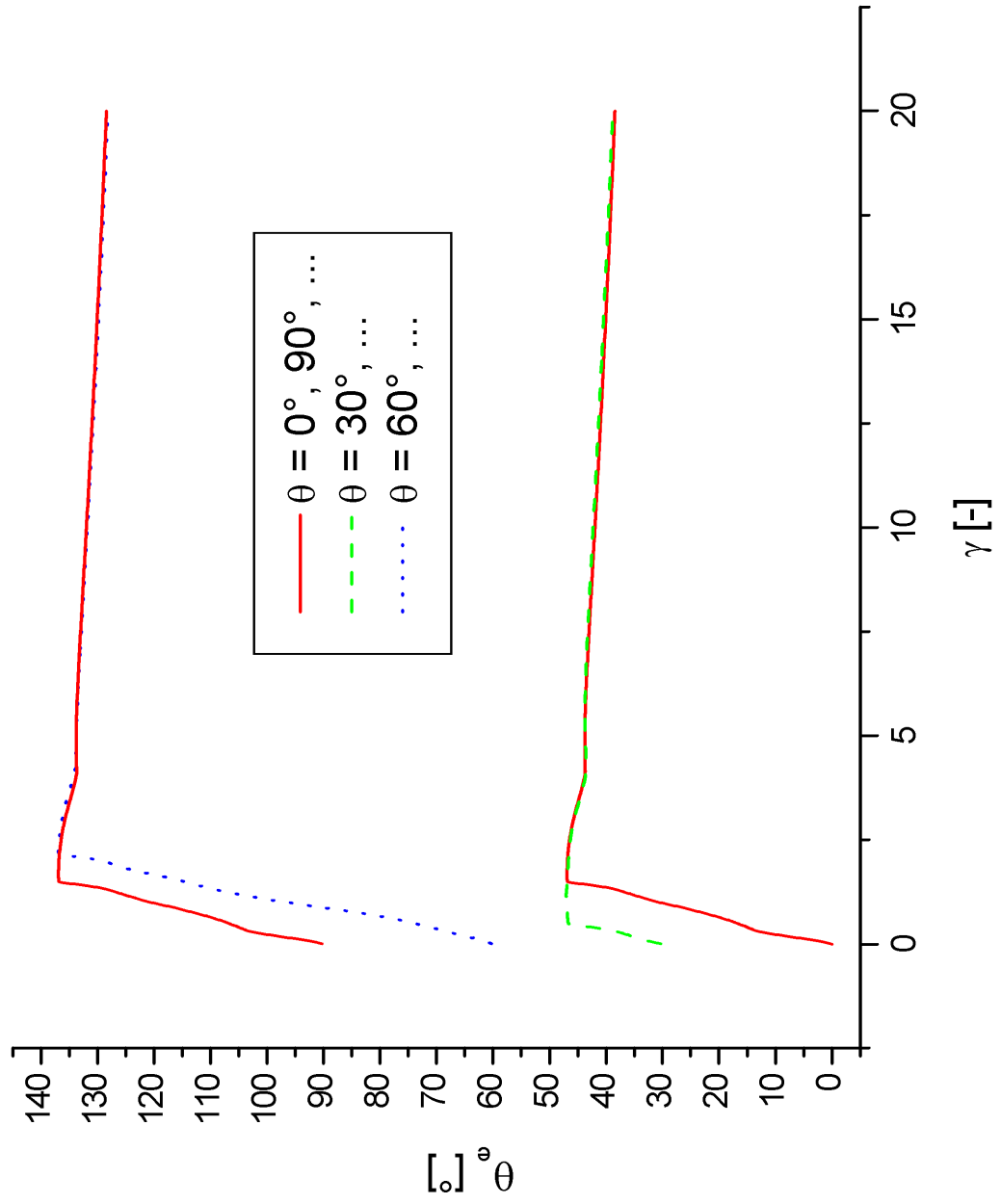


Abbildung 9.25: Winkel θ_e , Kopplungsparameter $q = 1.0$

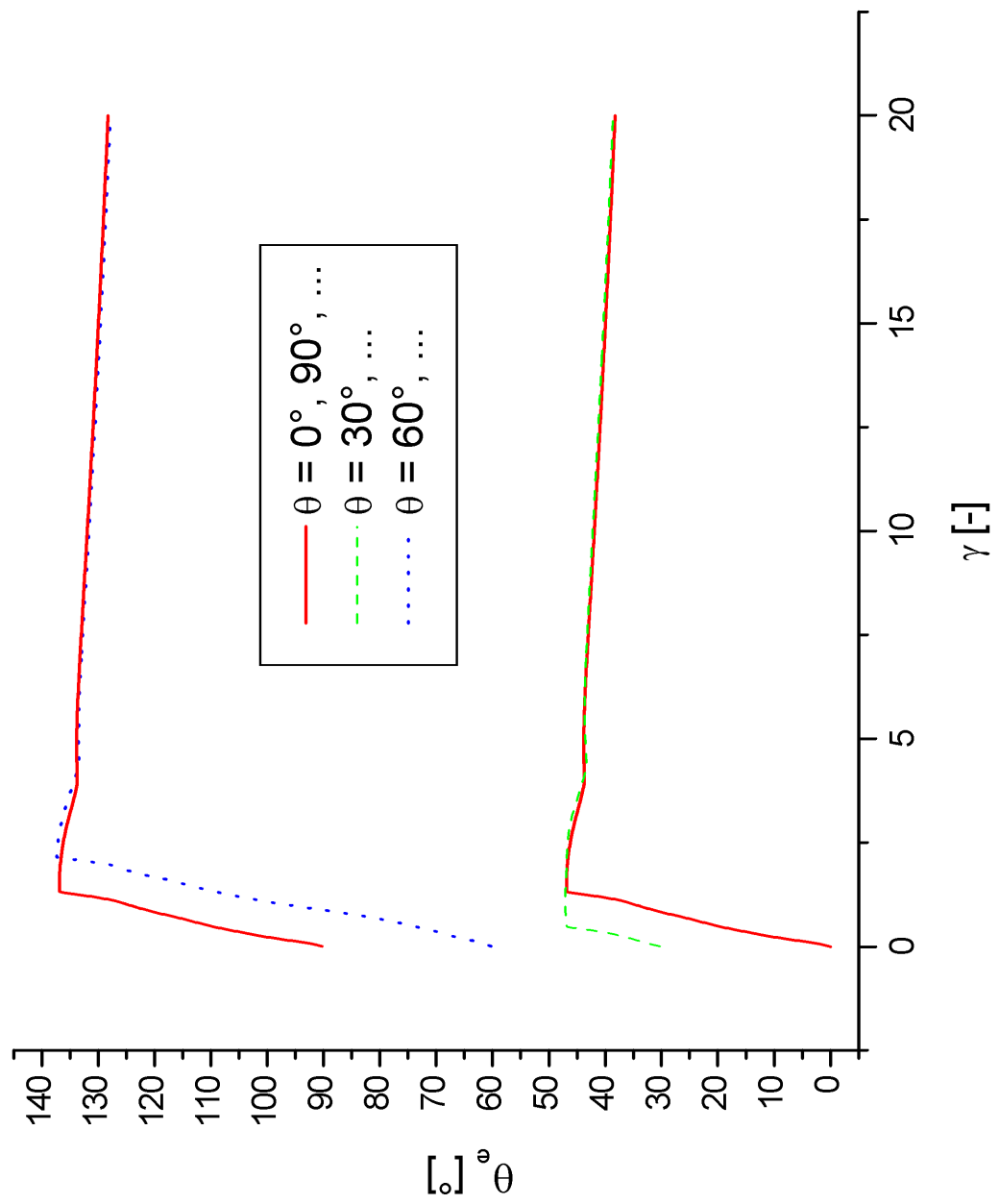


Abbildung 9.26: Winkel θ_e , Kopplungsparameter $q = 1.4$

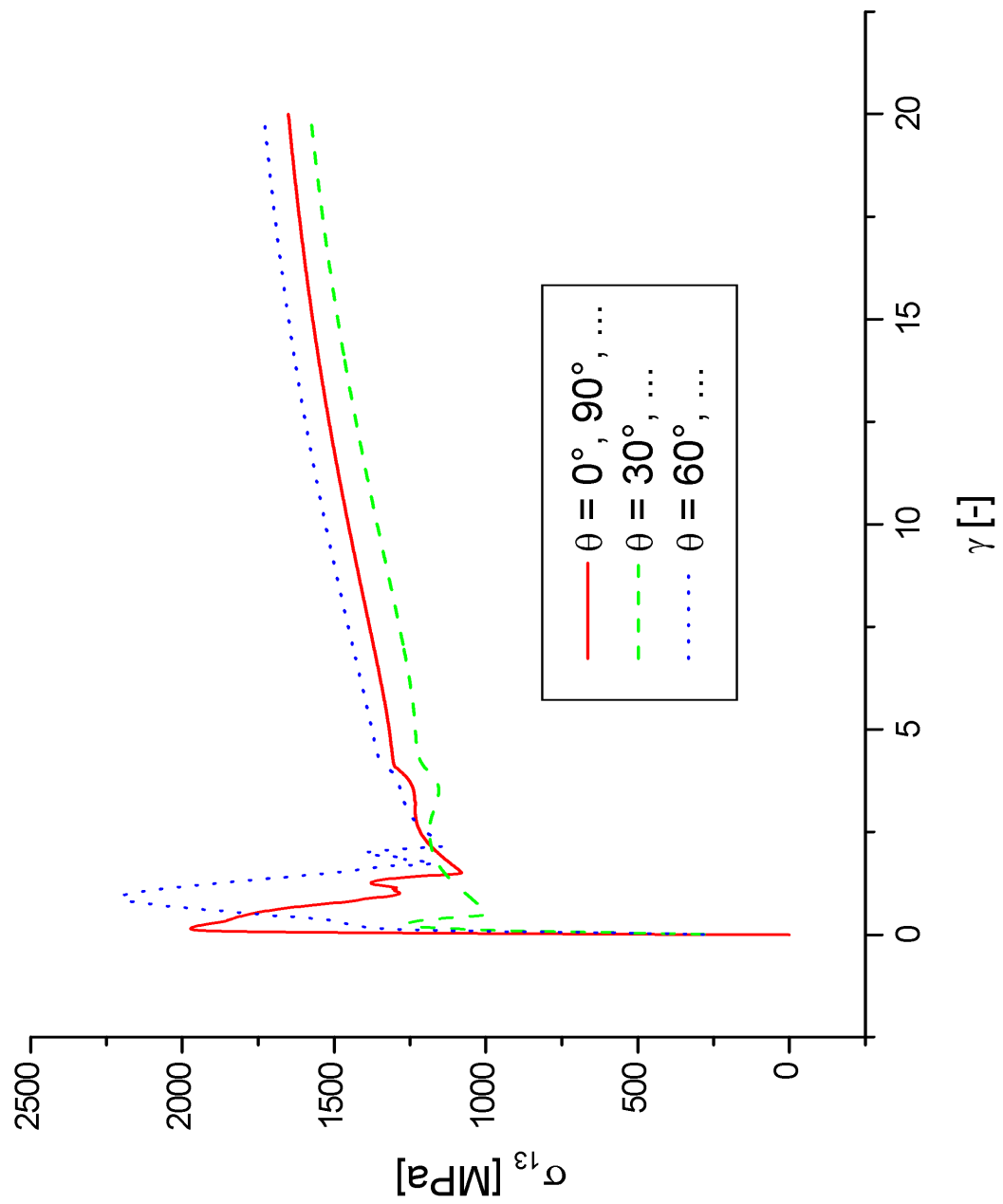


Abbildung 9.27: Spannung σ_{13} , Kopplungsparameter $q = 1.0$

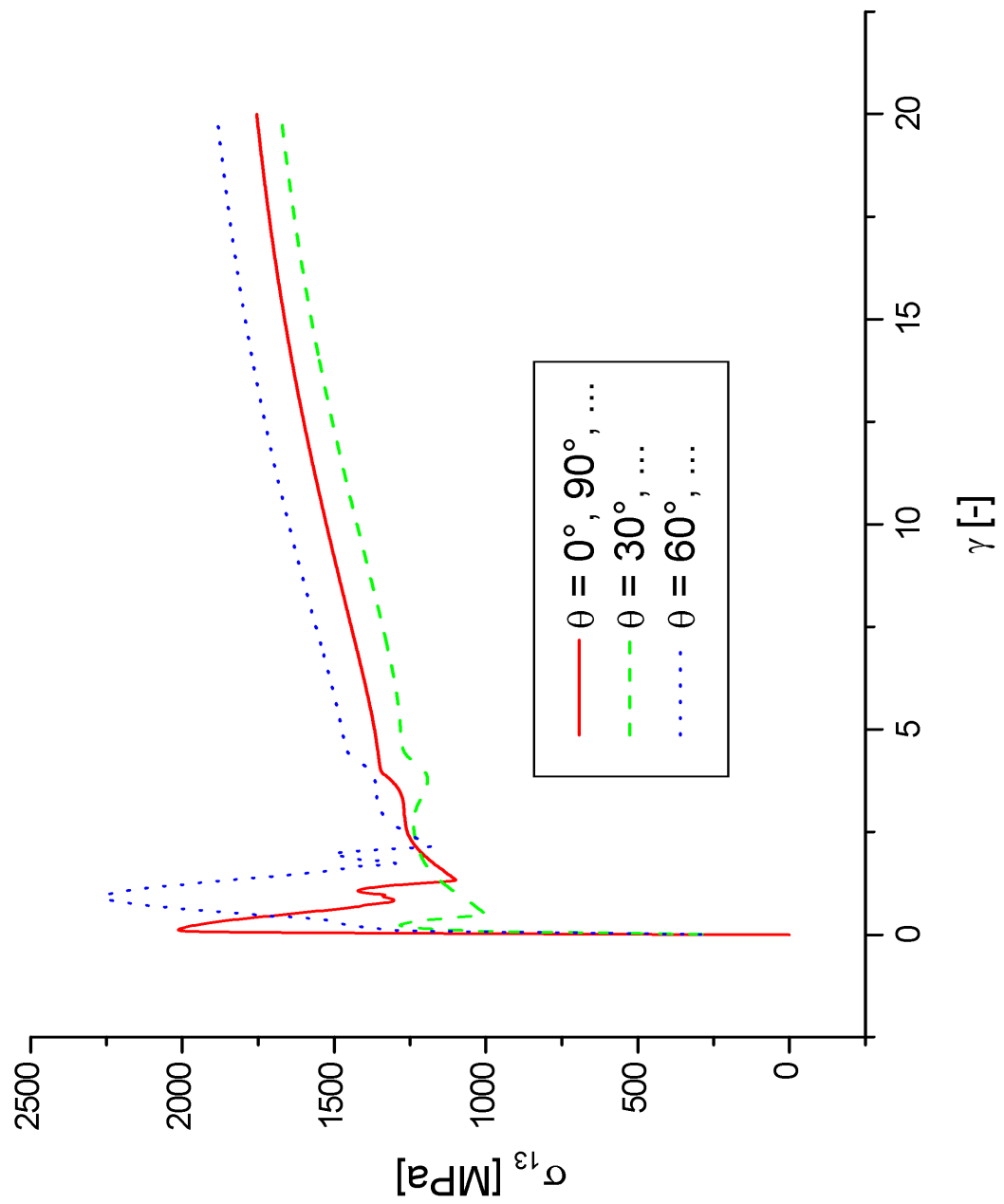


Abbildung 9.28: Spannung σ_{13} , Kopplungsparameter $q = 1.4$

9.5 Vergleich mit Modellen aus der Literatur

9.5.1 Modell von Anand [1]

Vorgabe des Deformationsgradienten $\mathbf{F}(t)$:

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$$

Almansi'scher Verzerrungstensor:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - (\mathbf{F}\mathbf{F}^T)^{-1}) \quad , \quad \mathbf{A}_e = \mathbf{A} - \mathbf{A}_p$$

Isotropes Elastizitätsgesetz:

$$\mathbf{S} = \lambda Sp(\mathbf{A}_e) \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{A}_e$$

Vektoren der Gleitsysteme:

$$\mathbf{s}^{(i)} = (\mathbf{Re}\Phi) \mathbf{s}_0^{(i)} \quad , \quad \mathbf{n}^{(i)} = (\mathbf{Re}\Phi) \mathbf{n}_0^{(i)}$$

Schmid-Spannung:

$$\tau^{(i)} = \mathbf{s}^{(i)} \cdot \mathbf{S} [\mathbf{n}^{(i)}]$$

Plastische Scherrate:

$$\dot{\gamma}^{(i)} = \dot{\gamma}_0 \left| \frac{\tau^{(i)}}{g^{(i)}} \right|^{1/m} \cdot \frac{\tau^{(i)}}{|\tau^{(i)}|}$$

Verfestigung:

$$\dot{g}^{(i)} = \sum_j \tilde{h}_{ij} |\dot{\gamma}^{(i)}|$$

mit

$$\tilde{h}_{ij} = q_{ij} h_j \quad , \quad q_{ij} : \text{Kopplungsmatrix}$$

$$h_j = h_0 \left(1 - \frac{s^{(j)}}{s_s} \right)^a$$

Evolution der Drehmatrix $(\mathbf{Re}\Phi)$:

$$(\mathbf{Re}\Phi)^{\cdot} = \left\{ \mathbf{W} - \frac{1}{2n} \sum_i \dot{\gamma}_p^{(i)} (\mathbf{s}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} - \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{s}^{(i)}) \right\} (\mathbf{Re}\Phi)$$

Evolution von \mathbf{A}_p :

$$\overset{\Delta}{\mathbf{A}}_p = \mathbf{D}_p = \frac{1}{2n} \sum_i \dot{\gamma}_p^{(i)} (\mathbf{s}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} + \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{s}^{(i)})$$

Folgende Materialkonstanten wurden verwendet:

λ	=	93000	MPa	μ	=	46500	MPa
$\dot{\gamma}_0$	=	0.001	s^{-1}	m	=	0.012	
q	=	1.4					
h_0	=	180	MPa	s_s	=	148	MPa
a	=	2.25		s_0	=	16	MPa

Tabelle 9.6: Tabelle der Materialparameter für das Einkristall-Materialmodell von Anand

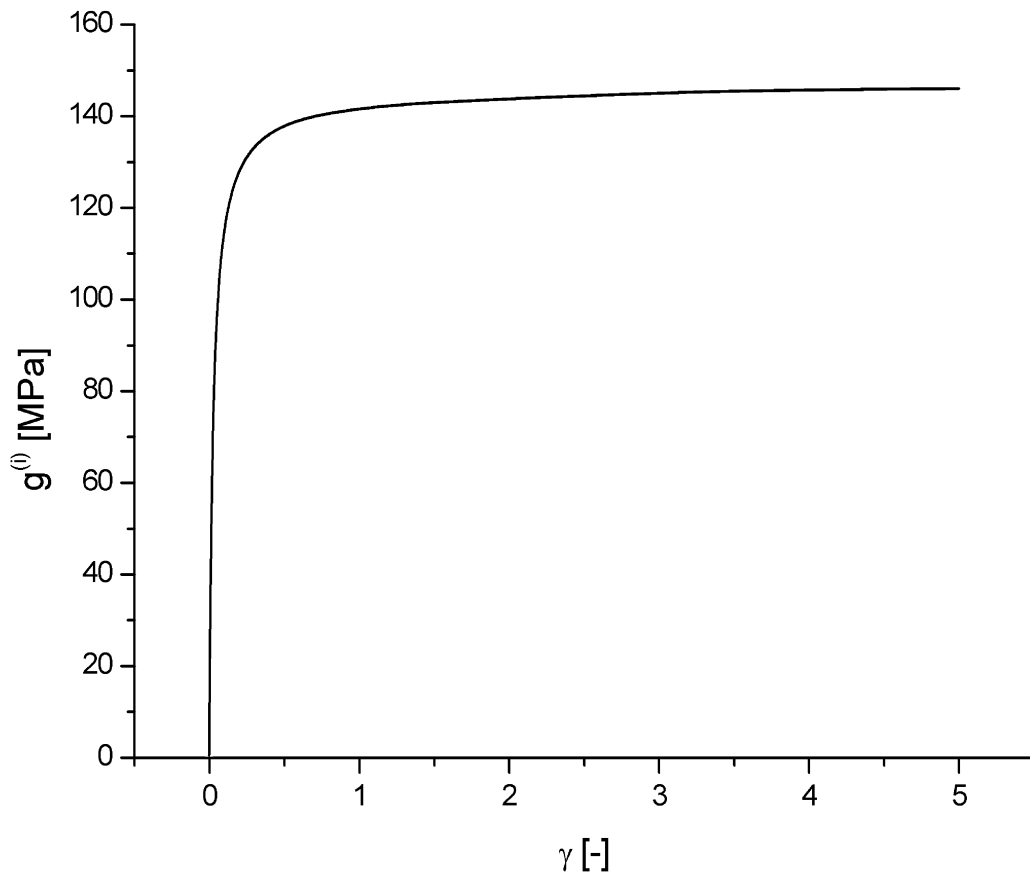


Abbildung 9.29: Darstellung der "slip resistance" $g^{(i)}$ für $q = 1.4$ und $\theta = 0^\circ$.

Man sieht keine Aufspaltung der "slip resistance". Dies wird dazu führen, dass hier kein Stillstand der Gitterrotation erreicht werden kann.

Ergebnisse:

Gitterrotation θ_e (Abbildungen 9.30, 9.31 und 9.32):

Das Gitter rotiert im Wesentlichen mit dem antisymmetrischen Anteil des Geschwindigkeitsgradienten ($\frac{d}{dt}(\mathbf{Re}\Phi) = \mathbf{W}(\mathbf{Re}\Phi)$) und kommt nicht zum Stillstand. Der Spin der plastischen Deformation führt zu keiner Stabilisierung.

Dies ändert sich auch nicht für verschiedene Werte von q , h_0 oder a .

Spannungsverlauf σ_{13} (Abbildungen 9.33, 9.34 und 9.35):

Man sieht den typischen Verlauf der Schubspannung σ_{13} für kubische Symmetrie bei einfacher Scherung.

Eine Erhöhung der Koppelkonstante q von 1.0 auf 1.4 (Abbildung 9.33) oder eine Erhöhung der Konstante h_0 von 180 MPa auf 580 MPa (Abbildung 9.35) bringt nur eine leichte Erhöhung der Schubspannung.

Eine Erhöhung des Exponenten in der Evolutionsgleichung der isotropen Verfestigung a von 2.25 auf 5.25 erniedrigt die Schubspannung (Abbildung 9.34).

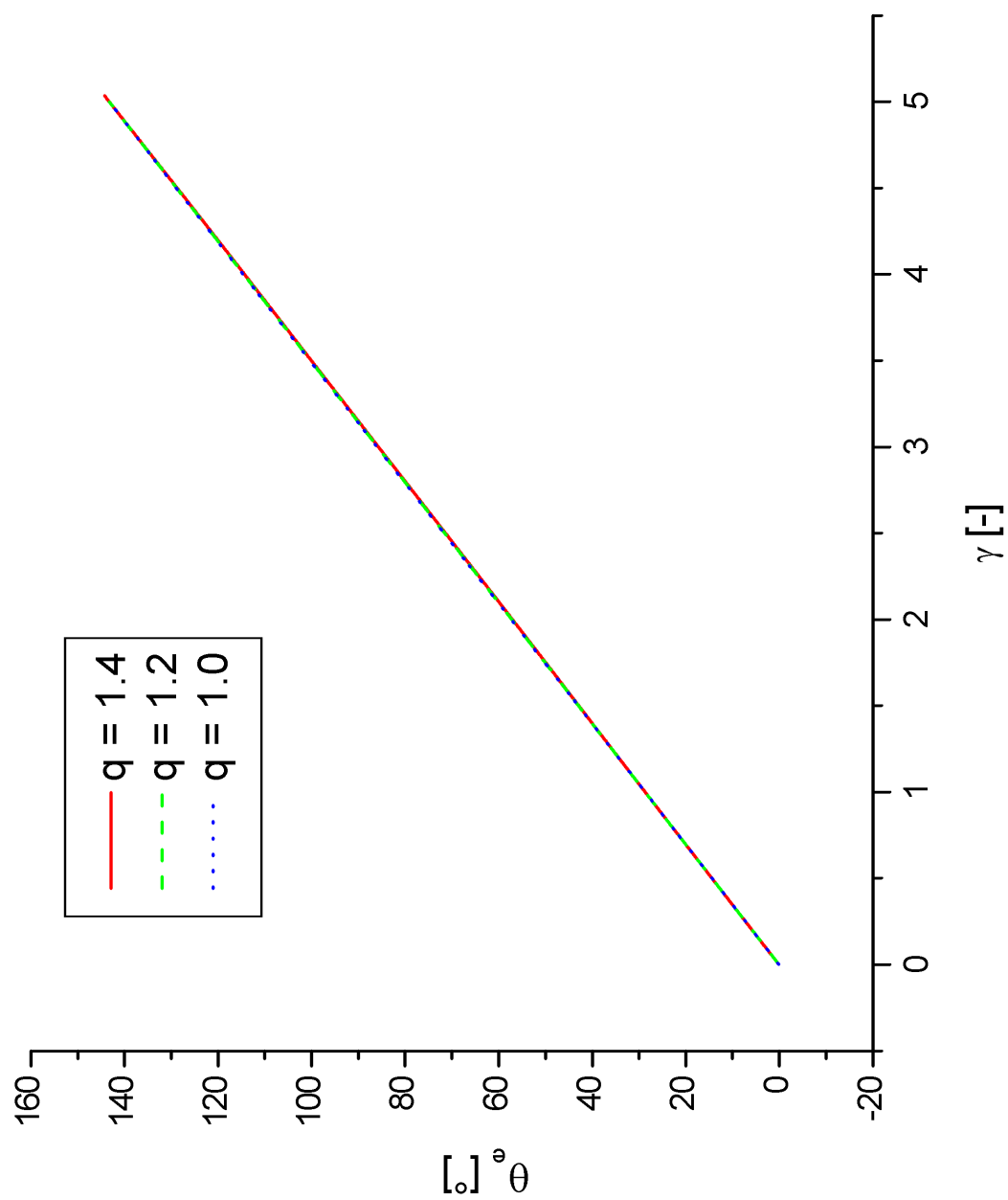


Abbildung 9.30: Winkel θ_e (Anand-Modell)

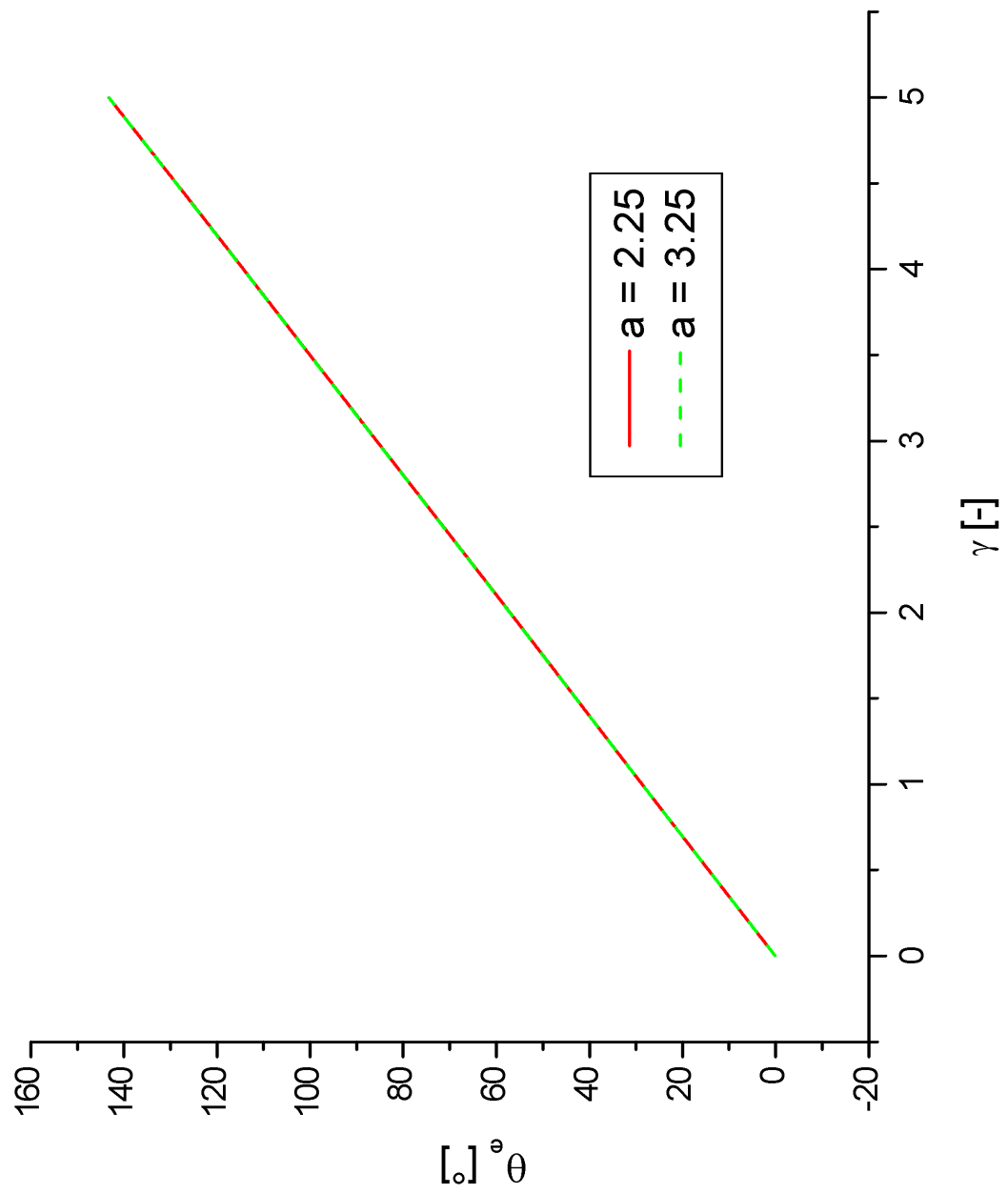


Abbildung 9.31: Winkel θ_e , verschiedene Parameter a (Anand-Modell)

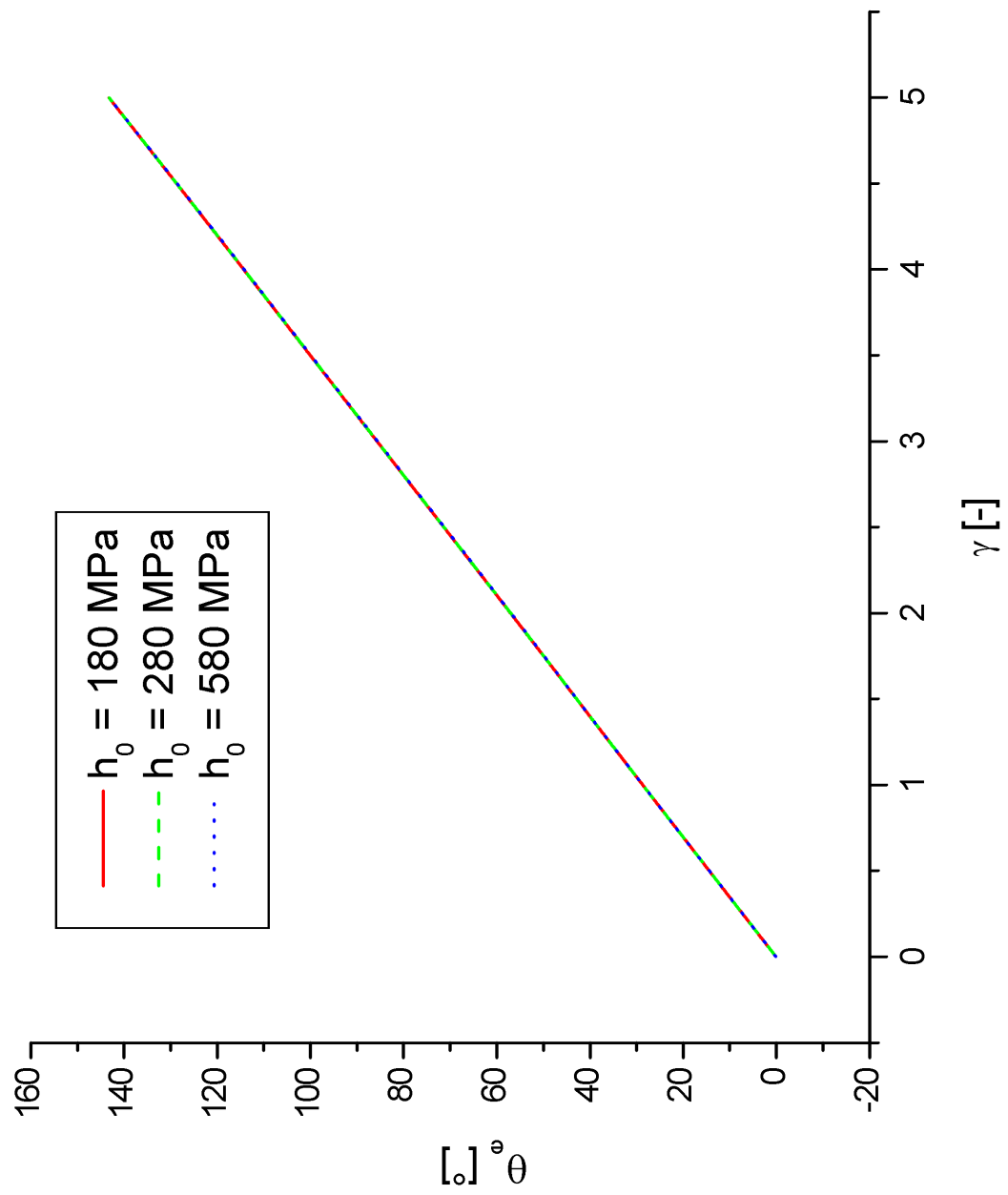


Abbildung 9.32: Winkel θ_e , verschiedene Parameter h_0 (Anand-Modell)

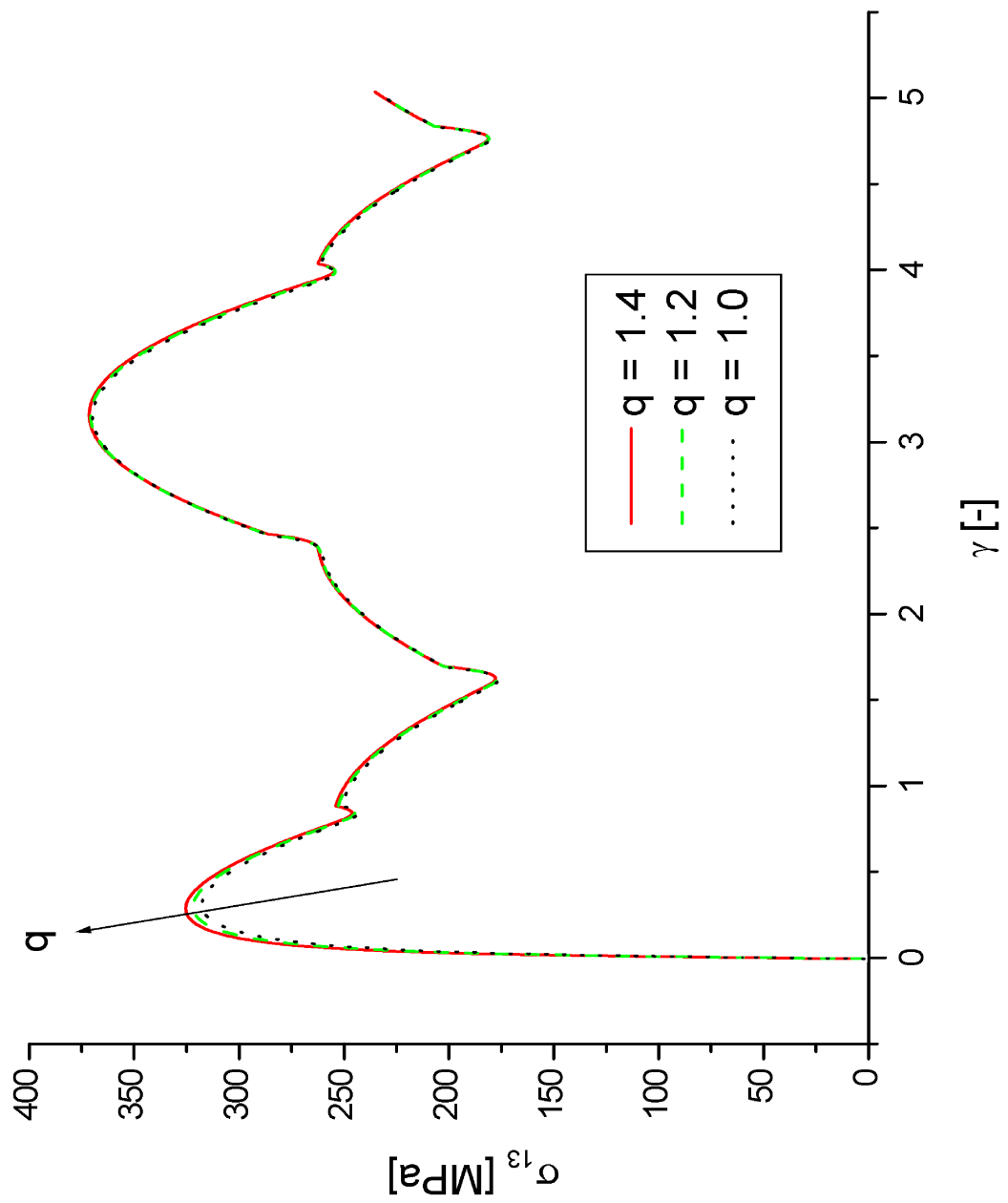


Abbildung 9.33: Spannung σ_{13} (Anand-Modell)

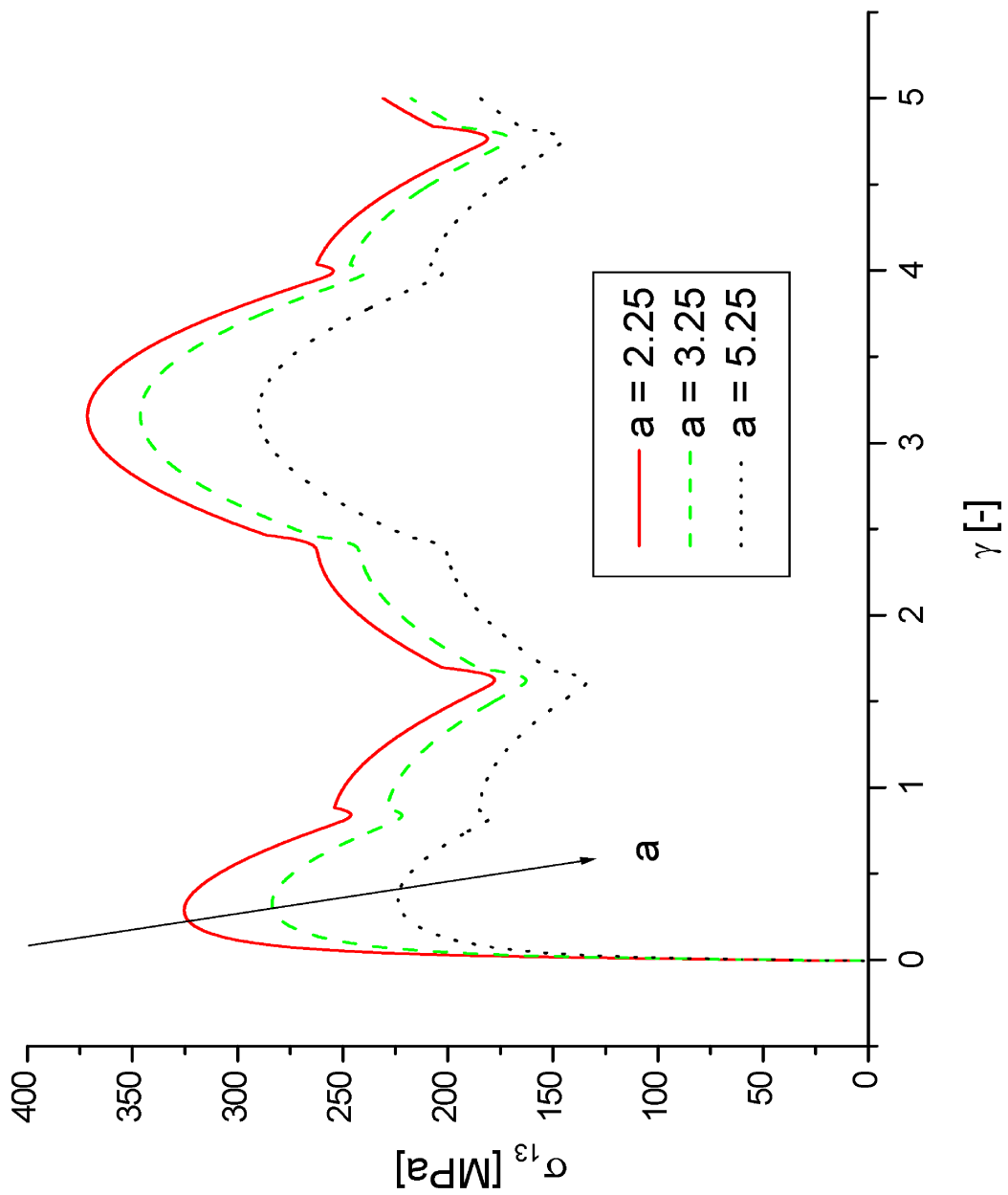


Abbildung 9.34: Spannung σ_{13} , verschiedene Parameter a (Anand-Modell)

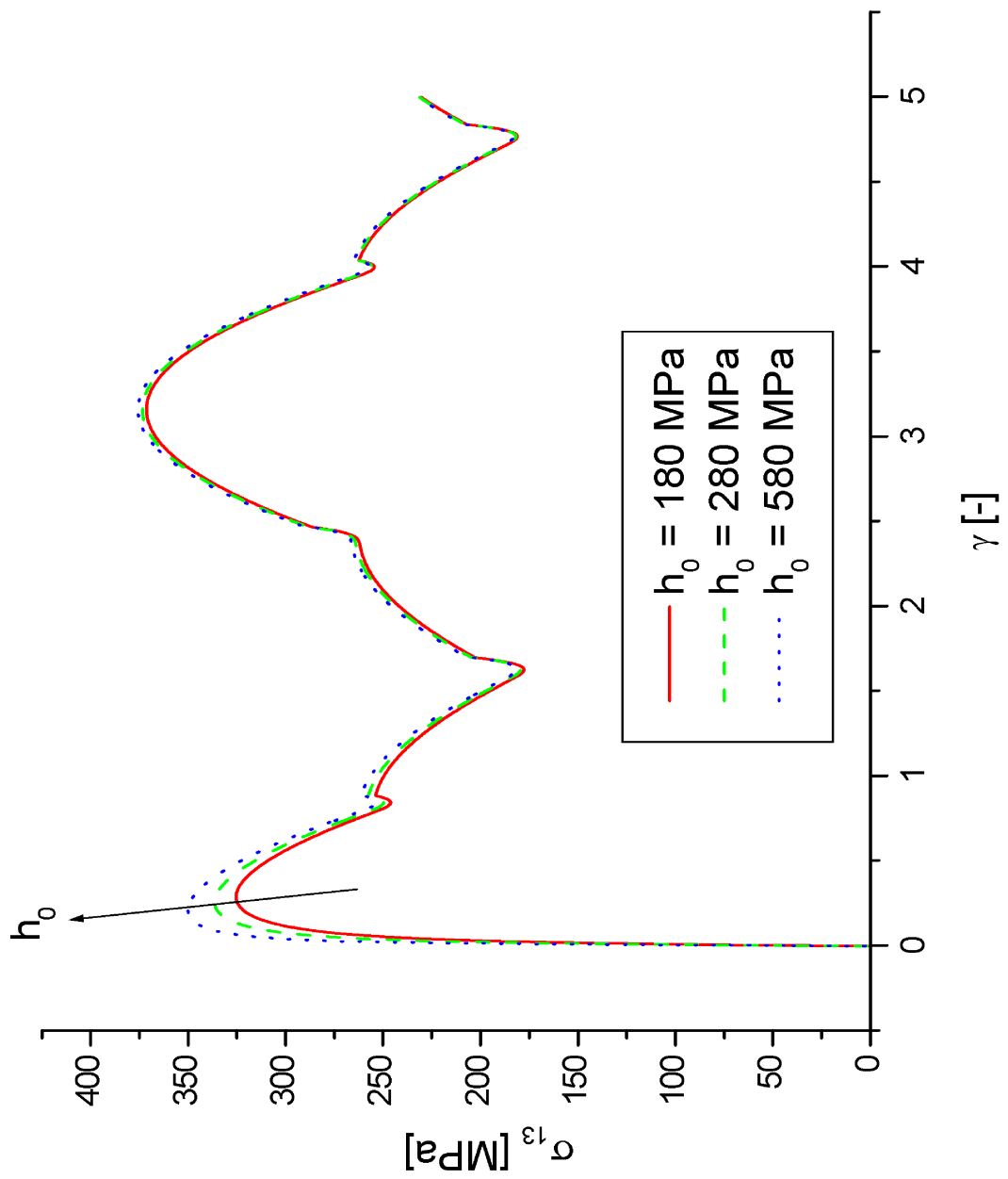


Abbildung 9.35: Spannung σ_{13} , verschiedene Parameter h_0 (Anand-Modell)

9.5.2 Modell von Asaro [3]

Vorgabe des Deformationsgradienten $\mathbf{F}(t)$:

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$$

Almansischer Verzerrungstensor:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - (\mathbf{F}\mathbf{F}^T)^{-1}) \quad , \quad \mathbf{A}_e = \mathbf{A} - \mathbf{A}_p$$

Isotropes Elastizitätsgesetz:

$$\mathbf{S} = \lambda Sp(\mathbf{A}_e) \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{A}_e$$

Vektoren der Gleitsysteme:

$$\mathbf{s}^{(i)} = (\mathbf{Re}\Phi) \mathbf{s}_0^{(i)} \quad , \quad \mathbf{n}^{(i)} = (\mathbf{Re}\Phi) \mathbf{n}_0^{(i)}$$

Schmid-Spannung:

$$\tau^{(i)} = \mathbf{s}^{(i)} \cdot \mathbf{S} [\mathbf{n}^{(i)}]$$

Plastische Scherrate:

$$\dot{\gamma}^{(i)} = \dot{\gamma}_0 \left| \frac{\tau^{(i)}}{g^{(i)}} \right|^{1/m} \cdot \frac{\tau^{(i)}}{|\tau^{(i)}|}$$

Verfestigung:

$$\dot{g}^{(i)} = \sum_j \tilde{h}_{ij} |\dot{\gamma}^{(i)}|$$

mit

$$\tilde{h}_{ij} = q_{ij} h(\gamma) \quad , \quad q_{ij} : \text{Kopplungsmatrix}$$

$$h(\gamma) = h_s + (h_0 - h_s) \operatorname{sech}^2 \left\{ \left(\frac{h_0 - h_s}{\tau_s - \tau_0} \right) \gamma \right\}$$

$$\gamma = \int_0^t \sum_i |\dot{\gamma}_p^{(i)}| dt$$

Evolution der Drehmatrix $(\mathbf{Re}\Phi)$:

$$(\mathbf{Re}\Phi)^\cdot = \left\{ \mathbf{W} - \frac{1}{2n} \sum_i \dot{\gamma}_p^{(i)} (\mathbf{s}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} - \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{s}^{(i)}) \right\} (\mathbf{Re}\Phi)$$

Evolution von \mathbf{A}_p :

$$\overset{\Delta}{\mathbf{A}}_p = \mathbf{D}_p = \frac{1}{2n} \sum_i \dot{\gamma}_p^{(i)} (\mathbf{s}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} + \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{s}^{(i)})$$

λ	=	93000	MPa	μ	=	46500	MPa
$\dot{\gamma}_0$	=	0.001	s^{-1}	m	=	0.005	
q	=	1.0					
h_0	=	$8.9 \cdot \tau_0$		h_s	=	$0.1 \cdot \tau_0$	
τ_0	=	100	MPa	τ_s	=	$1.8 \cdot \tau_0$	

Tabelle 9.7: Tabelle der Materialparameter für das Einkristall-Materialmodell von Asaro

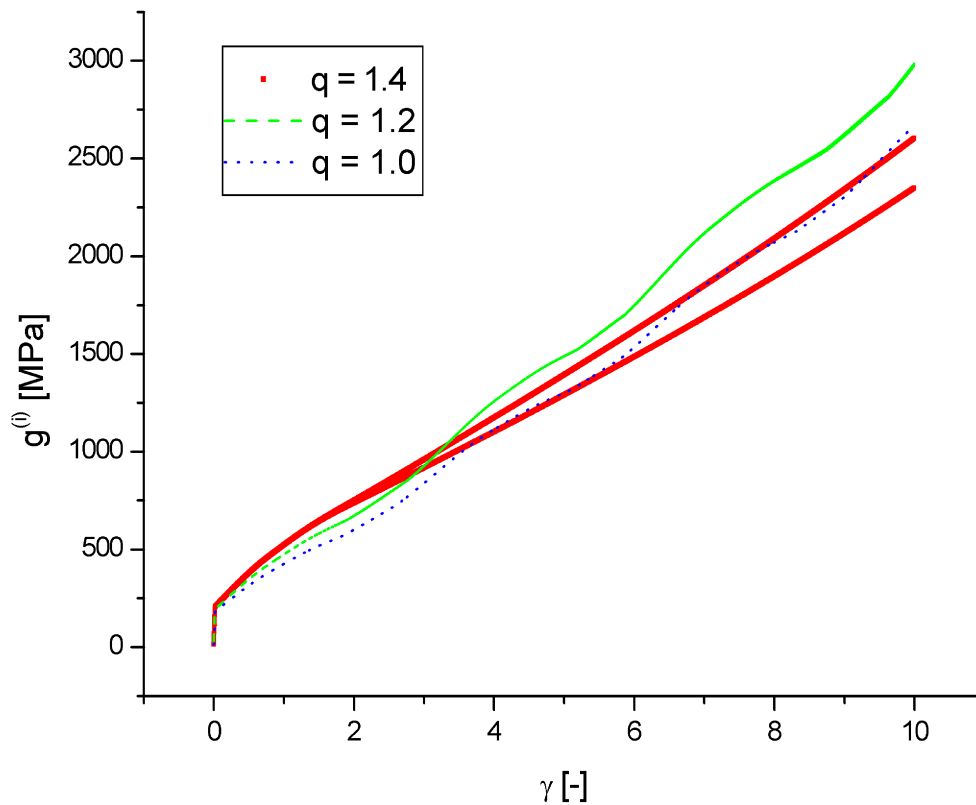


Abbildung 9.36: Darstellung der "slip system hardness" $g^{(i)}$ für verschiedene Werte von q , $\tau_0 = 100$ MPa und $\theta_e = 0^\circ$.

Hier sieht man zwei Dinge:

Für Werte der Kopplungskonstanten $q \geq 1.0 \wedge q < 1.4$ erfolgt keine Aufspaltung der "slip system hardness", und somit wird der Winkel der Gitterrotation θ_e nicht zu einem Grenzwert streben.

Für Werte $q \geq 1.4$ erfolgt eine Aufspaltung der "slip system hardness", und somit wird eine Stabilisierung der Gitterrotation möglich sein.

Ergebnisse:

Gitterrotation θ_e (siehe Abbildung 9.37):

Hier wurde nur mit einem Startwinkel $\theta_e = 0^\circ$ gerechnet.

Für $q = 1.2$ sieht man eine leichte Abweichung der Gitterrotation von einer Geraden und damit einen leichten Einfluss der plastischen Deformation auf θ_e .

Für $q = 1.3$ beginnt sich die Gitterrotation zu stabilisieren, allerdings bei einem Winkel von $\sim 220^\circ$. Dies ist aber in der Natur bei einfacher Scherung nicht möglich, daher ist diese Stabilisierung nichts wert. Der eingespannte Kristall würde sich bei einfacher Scherung fast um die eigene Achse drehen, und das ist nicht möglich.

Für Werte $q \geq 1.4$ erfolgt eine Stabilisierung bei $\theta_e \sim 40^\circ$, was in der Natur realisierbar und somit vernünftig ist.

Ähnliche Ergebnisse erhält man für den Parameter τ_0 (siehe Abbildung 9.38):

Hier sieht man erst für $\tau_0 \geq 300$ MPa eine vernünftige Stabilisierung der Gitterrotation θ_e . Der Wert der Kopplungskonstante ist hier $q = 1.0$.

Spannungsverlauf σ_{13} (siehe Abbildungen 9.39):

Für Werte $q < 1.4$ sieht man den typischen Spannungsverlauf σ_{13} für kubische Symmetrie mit fortschreitender Gitterrotation. Zusätzlich ist ein Anstieg der Spannung zu beobachten. Dies ist auch verständlich, da die isotrope Verfestigung g auch immer weiter ansteigt.

Für Werte $q \geq 1.4$ kommt es zu einer Stabilisierung der Gitterrotation und damit verändert sich der Spannungsverlauf.

Ähnliche Ergebnisse erhält man für den Parameter τ_0 (siehe Abbildungen 9.40):

Der Wert der Kopplungskonstanten ist hier $q = 1.0$. Die Spannungsverläufe steigen für höhere Werte von τ_0 an. Eine Änderung im Verlauf der Spannungen ist für Werte $\tau_0 \geq 300$ MPa zu beobachten (dann erst erfolgt Stabilisierung der Gitterrotation).

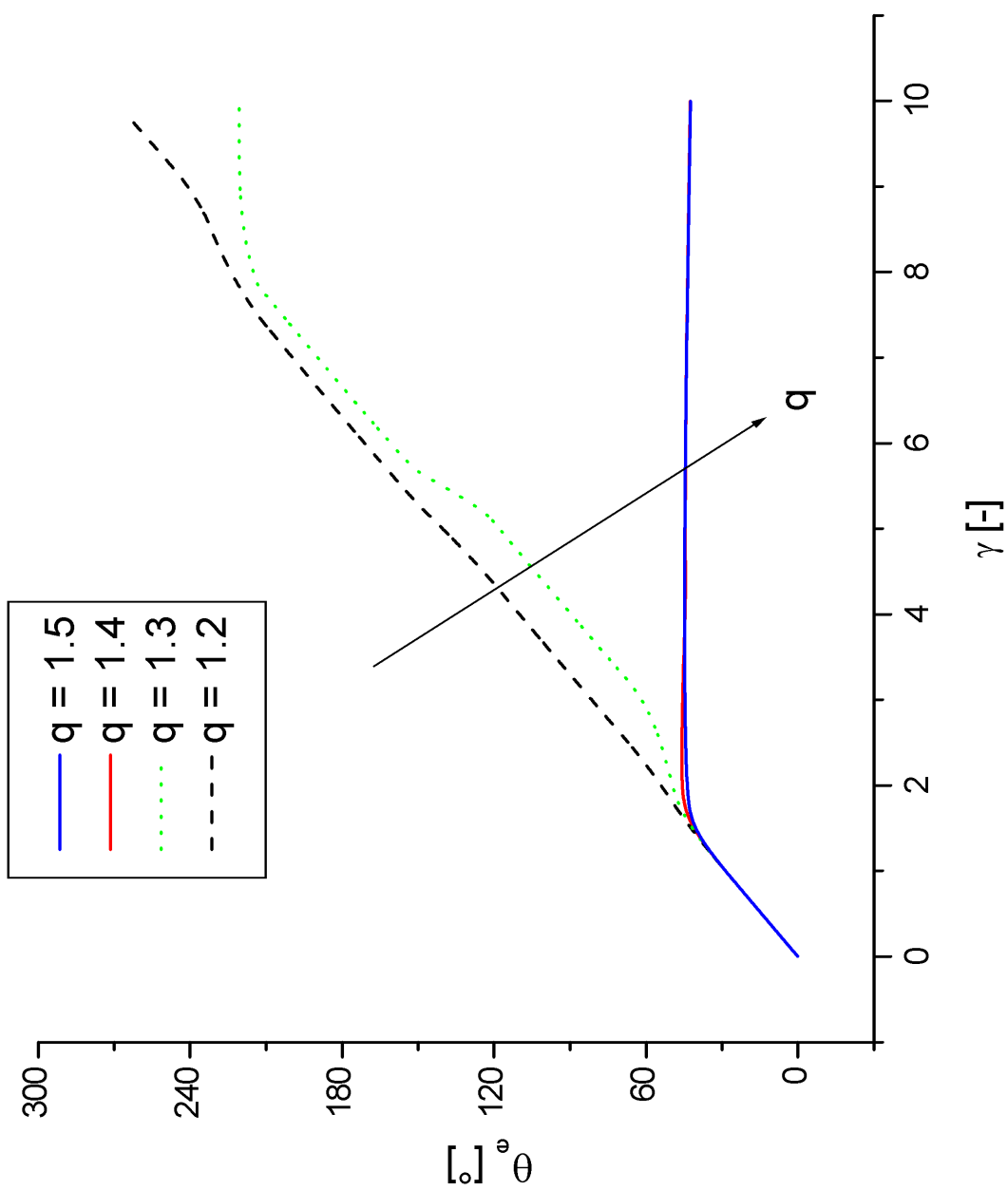


Abbildung 9.37: Winkel θ_e (Asaro-Modell)

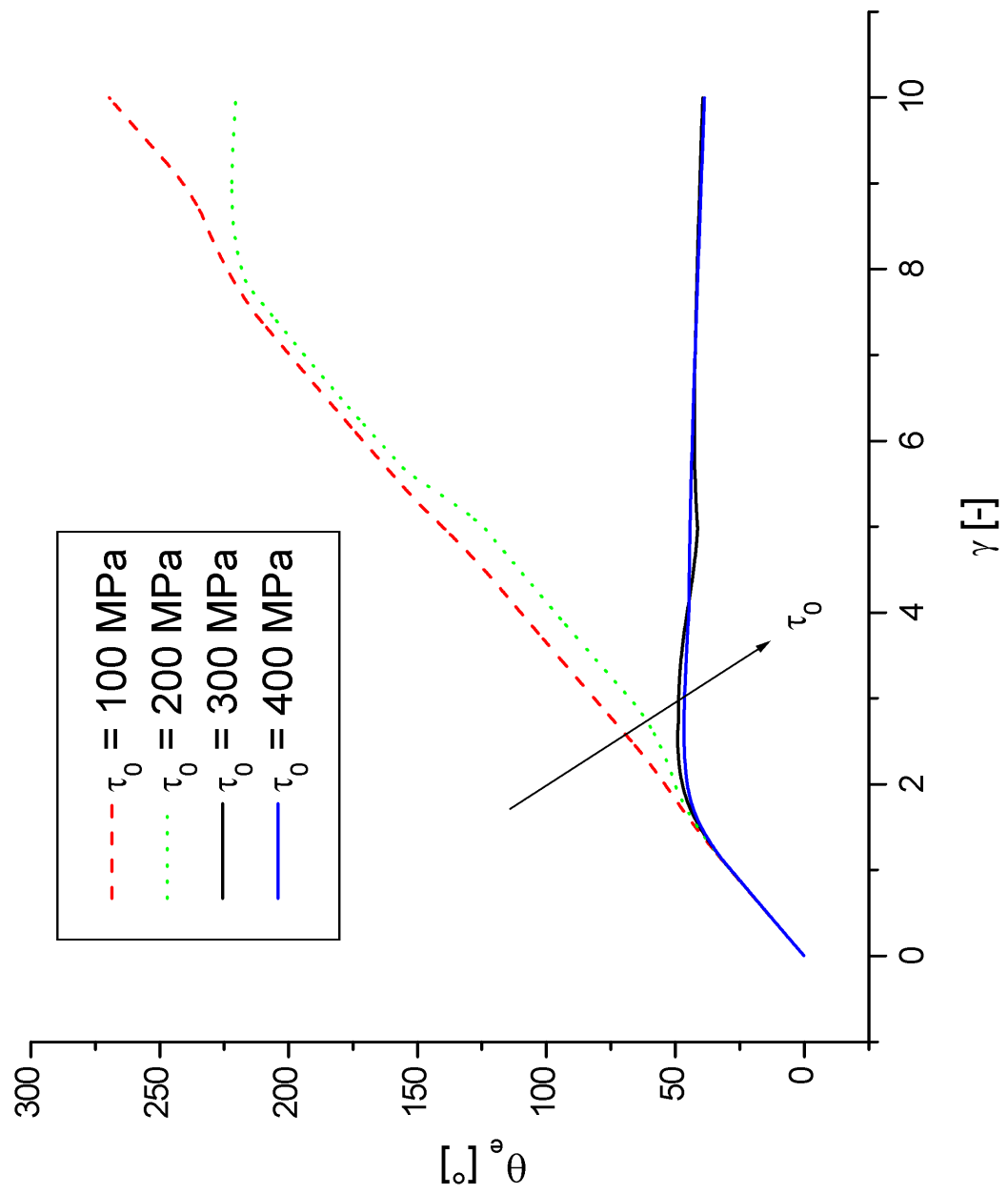


Abbildung 9.38: Winkel θ_e , verschiedene Parameter τ_0 (Asaro-Modell)

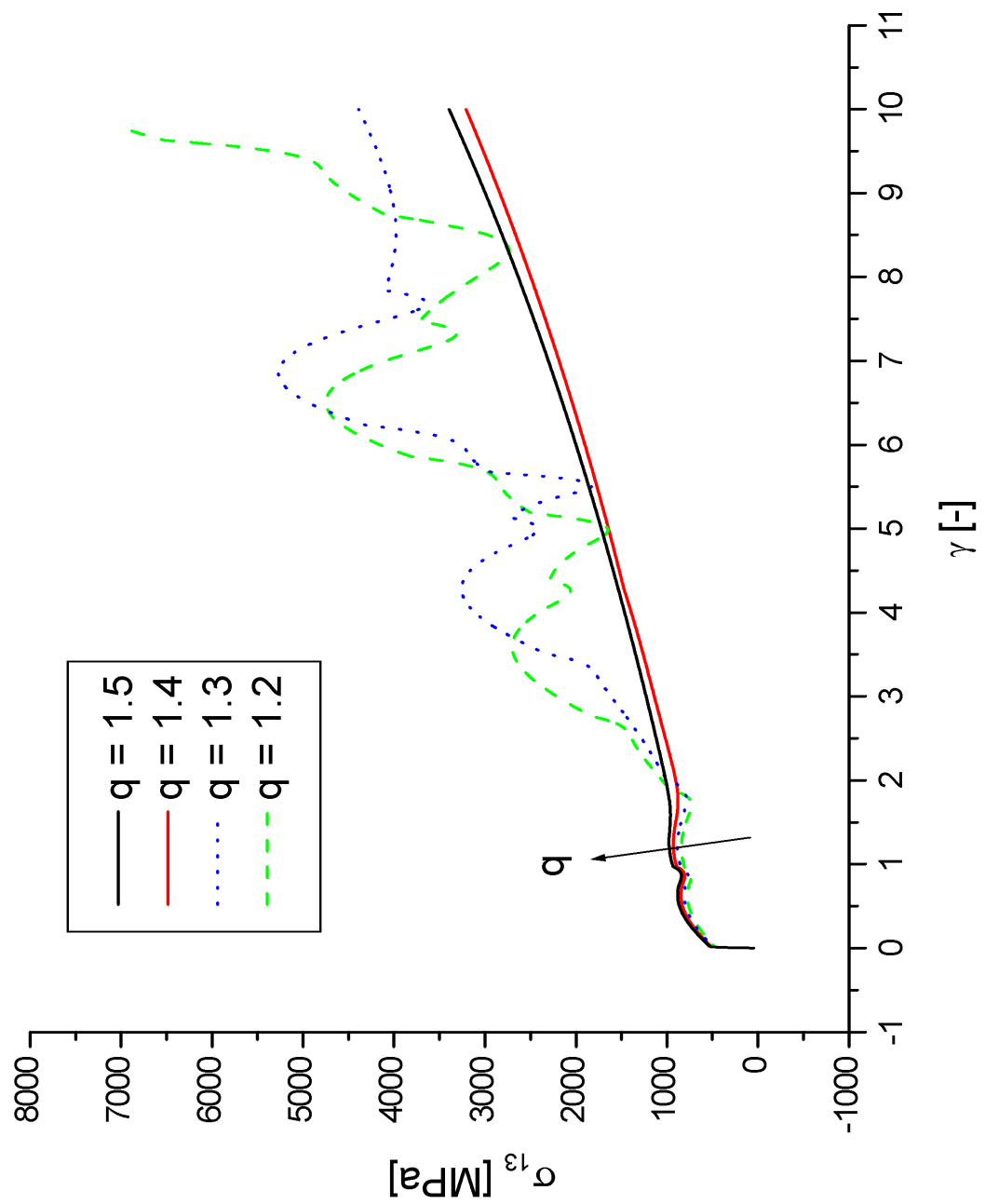


Abbildung 9.39: Spannung σ_{13} (Asaro-Modell)

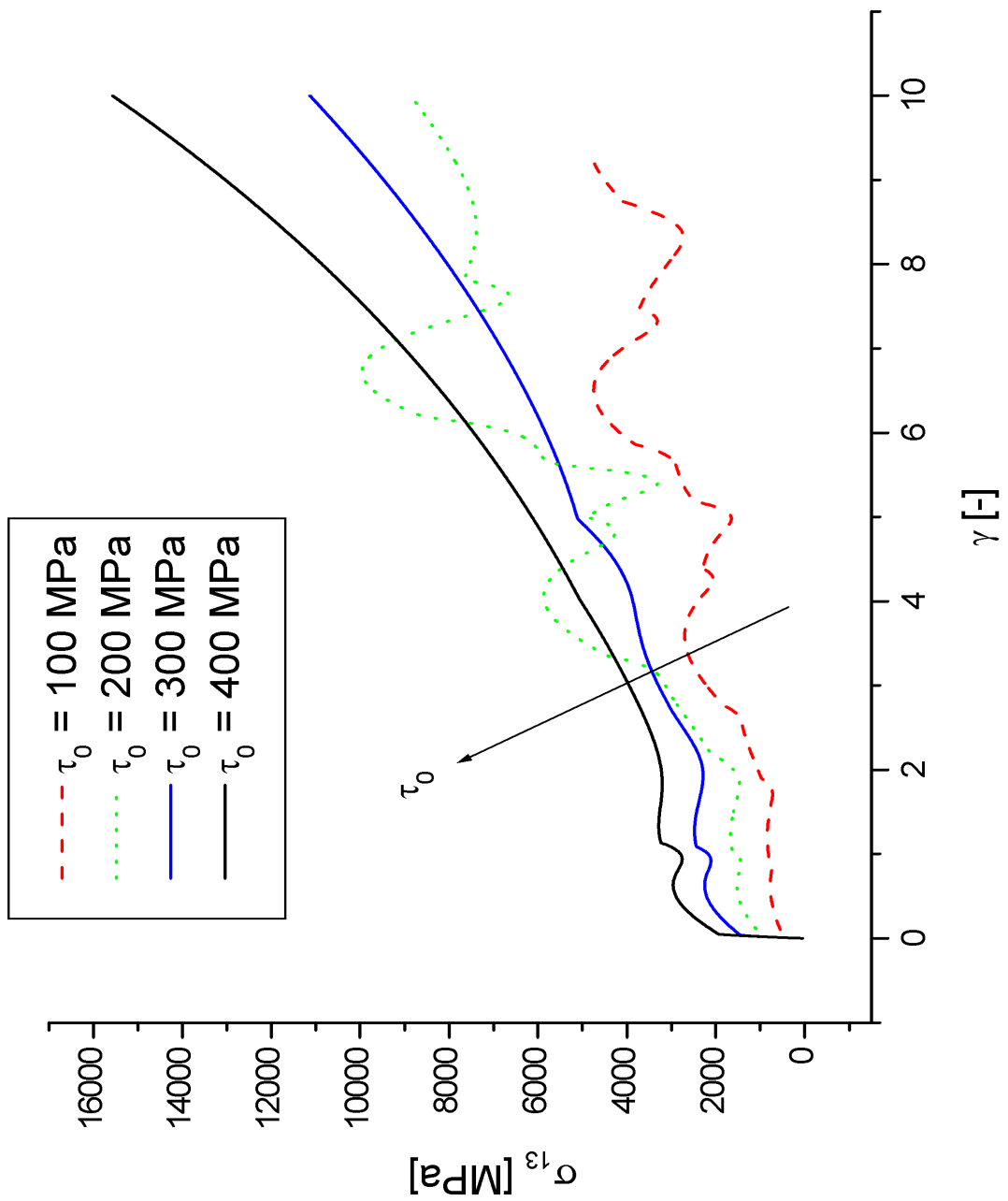


Abbildung 9.40: Spannung σ_{13} , verschiedene Parameter τ_0 (Asaro-Modell)

9.5.3 Weitere Kopplungsmöglichkeiten in der isotropen Verfestigung

Hier werden weitere Möglichkeiten der Kopplung in der isotropen Verfestigung vorgestellt, die in der Arbeitsgruppe von Prof. Tsakmakis angewendet wurden.

Vorgabe des Deformationsgradienten $\mathbf{F}(t)$:

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$$

Almansischer Verzerrungstensor:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - (\mathbf{F}\mathbf{F}^T)^{-1}) \quad , \quad \mathbf{A}_e = \mathbf{A} - \mathbf{A}_p$$

Isotropes Elastizitätsgesetz:

$$\mathbf{S} = \lambda Sp(\mathbf{A}_e) \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{A}_e$$

Vektoren der Gleitsysteme:

$$\mathbf{s}^{(i)} = (\mathbf{Re}\Phi) \mathbf{s}_0^{(i)} \quad , \quad \mathbf{n}^{(i)} = (\mathbf{Re}\Phi) \mathbf{n}_0^{(i)}$$

Schmid-Spannung:

$$\tau^{(i)} = \mathbf{s}^{(i)} \cdot \mathbf{S} [\mathbf{n}^{(i)}]$$

Plastische Scherrate:

$$\dot{s}^{(i)} = \frac{< |\tau^{(i)}| - k^{(i)} >^m}{\eta} \quad , \quad \dot{\gamma}_p^{(i)} = \dot{s}^{(i)} \frac{(\tau^{(i)})}{|\tau^{(i)}|}$$

Evolution der Drehmatrix:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &:= \mathbf{W} - \frac{1}{2n} \sum_i \dot{\gamma}_p^{(i)} (\mathbf{s}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} - \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{s}^{(i)}) \\ (\mathbf{Re}\Phi)^{\cdot} &= \mathbf{K} (\mathbf{Re}\Phi) \end{aligned}$$

Evolution von \mathbf{A}_p :

$$\overset{\Delta}{\mathbf{A}}_p = \mathbf{D}_p = \frac{1}{2n} \sum_i \dot{\gamma}_p^{(i)} (\mathbf{s}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} + \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{s}^{(i)})$$

Als Möglichkeit 1 wird noch einmal die Kopplungsmöglichkeit aus Kapitel (9.4.2) dargestellt, damit alle behandelten Kopplungsmöglichkeiten beisammen stehen.

Möglichkeit 1:

Aufspaltung der isotropen Verfestigung:

$$k^{(i)} = k_0^{(i)} + R^{(i)}$$

Spannung $R^{(i)}$:

$$R^{(i)} = \zeta^{(i)} q_{ij} r^{(j)} \quad , \quad q_{ij} : \text{Kopplungsmatrix}$$

Evolution der Dehnung $r^{(i)}$:

Möglichkeit 1:

$$\dot{r}^{(i)} = (1 - \beta^{(i)} r^{(i)}) \dot{s}^{(i)}$$

λ	=	93000	MPa	μ	=	46500	MPa
m	=	4.0		η	=	20000	(MPa) ^m s
q	=	1.4		k_0	=	150	MPa
ζ	=	20		β	=	0.1	

Tabelle 9.8: Tabelle der Materialparameter für Kopplungsmöglichkeit 1

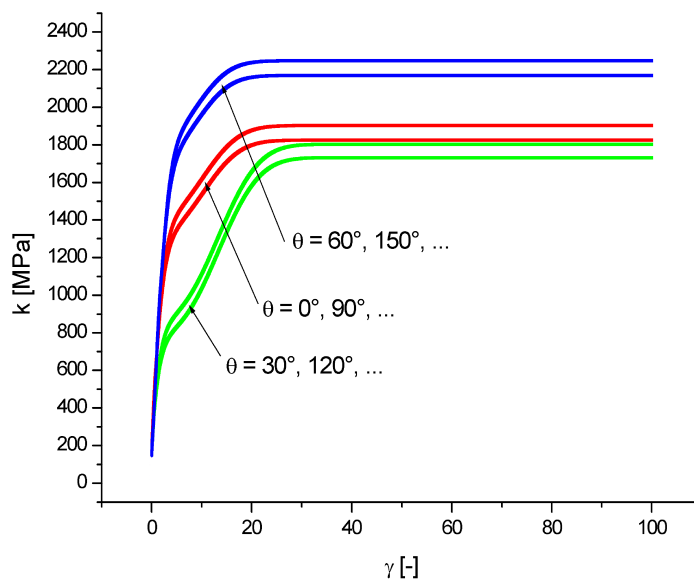


Abbildung 9.41: Darstellung der isotropen Verfestigung für $q = 1.4$ (Kopplungsmöglichkeit 1).

Beweis der thermodynamischen Konsistenz der Möglichkeit 1:

Aus der Restungleichung folgt unter anderem (siehe 9.51)

$$R^{(i)} = \zeta q^{(ij)} r^{(j)} \geq 0 \quad \text{und} \quad \dot{s}^{(i)} - \dot{r}^{(i)} \geq 0 \quad .$$

Dies muss durch den Ansatz für die Kopplungsmöglichkeit 1 erfüllt werden.

Unter der Annahme $r^{(i)} \geq 0$ (was natürlich bewiesen werden muss), genügt es zu zeigen, daß

$$\dot{s}^{(i)} - \dot{r}^{(i)} = \beta^{(i)} r^{(i)} \dot{s}^{(i)} \geq 0. \quad (9.76)$$

Dies ist der Fall, falls die Konstanten $\beta^{(i)} \geq 0$ sind.

Nun ist noch $r^{(i)} \geq 0$ zu zeigen:

Dazu wird die Differentialgleichung

$$\dot{r}^{(i)} = (1 - \beta^{(i)} r^{(i)}) \dot{s}^{(i)}$$

umgeschrieben zu

$$\frac{dr^{(i)}}{ds^{(i)}} = (1 - \beta^{(i)} r^{(i)}) \quad . \quad (9.77)$$

Diese Differentialgleichung hat zusammen mit der Anfangsbedingung $r^{(i)}(s^{(i)} = 0) = 0$ die Lösung

$$r^{(i)}(t) = \frac{1 - e^{\beta^{(i)} s^{(i)}(t)}}{\beta^{(i)}} \quad . \quad (9.78)$$

Damit ist $r^{(i)}(t) \geq 0$ gesichert.

Die Differentialgleichung (9.77) stellt außerdem ein *Feld von Tangentenvektoren* in jedem Punkt $\{s^{(i)}, r^{(i)}\}$ an die Kurven $r^{(i)}(s^{(i)})$ dar.

Zu Beginn ($r^{(i)} = 0$) ist

$$\frac{dr^{(i)}}{ds^{(i)}} = 1 \geq 0 \quad \forall s^{(i)} \quad (9.79)$$

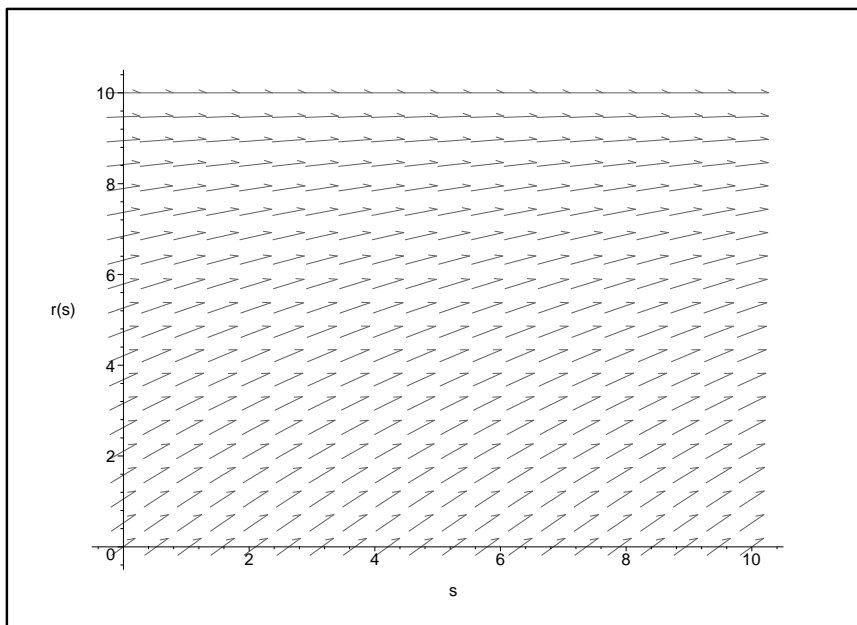


Abbildung 9.42: Vektorfeld von $\frac{dr^{(i)}}{ds^{(i)}} = (1 - \beta^{(i)}r^{(i)})$

Dies ist auch auf der Abszisse in Bild (9.42) erkennbar (Index (i) weggelassen). Für ansteigendes $r^{(i)}(s^{(i)})$ nimmt die Steigung des Vektorfeldes immer mehr ab, bis die Steigung für $r^{(i)}(s^{(i)}) = 10.0$ null wird und somit in eine Horizontale übergeht. Somit ist

$$r^{(i)}(s^{(i)}) \geq 0 \quad \forall s^{(i)} \quad (9.80)$$

gesichert.

Da für $r^{(i)}(t)$

$$\frac{dr^{(i)}}{dt} = \frac{dr^{(i)}}{ds^{(i)}} \frac{ds^{(i)}}{dt} \quad (9.81)$$

gilt und die Steigung der plastischen Bogenlänge

$$\frac{ds^{(i)}}{dt} \geq 0 \quad , \quad (9.82)$$

ist die zu fordernde Bedingung $r^{(i)}(s^{(i)}(t)) \geq 0$ erfüllt.

Die Herleitung über das Feld der Tangentenvektoren ist für die weiteren Kopplungsmöglichkeiten sinnvoll, bei denen eine explizite Form für $r^{(i)}(t)$, wie (9.78) nicht mehr möglich ist.

Ergebnisse:

Hier erfolgt eine deutliche Aufspaltung der isotropen Verfestigung (siehe Abbildung 9.41) für alle Anfangsorientierung $\theta_e = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. Damit kann man eine vernünftige Stabilisierung der Gitterrotation erwarten.

Außerdem strebt jede isotrope Verfestigung gegen einen Grenzwert, was asymptotische Spannungsverläufe für σ_{13} voraussagt (kinematische Verfestigung wird hier nicht betrachtet und ist 0).

Gitterrotation θ_e (Abbildung 9.43):

Es wurden vier Startorientierungen gewählt: $\theta_e \in \{0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ\}$.

Man sieht deutlich, daß alle Winkel der Gitterrotation gegen einen Grenzwert streben, und dieser nicht mehr als 90° von der Startorientierung abweicht. Somit ergibt sich eine vernünftige Stabilisierung der Gitterrotation. Dabei bilden sich zwei Grenzwerte aus: $\sim 25^\circ$ und $\sim 115^\circ$.

Dies ist aber materialparameterabhängig und variiert etwas. Wichtig ist nur, daß sich beide Grenzwerte für kubische Symmetrie um 90° unterscheiden.

Im nächsten Bild (Abbildung 9.44) wird von der Startorientierung $\theta_e = 0^\circ$ ausgegangen und der Kopplungsparameter q variiert. Dabei ergibt sich für die getesteten Werte $q = 1.2$ und $q = 1.4$ eine Stabilisierung der Gitterrotation. Für den Wert $q = 1.0$ erfolgt fortlaufende Rotation des Gitters, was nicht vernünftig ist.

Spannungsverlauf σ_{13} (Abbildung 9.45):

Dargestellt sind die Spannungsverläufe für σ_{13} für verschiedene Anfangsorientierungen θ_e . Alle Spannungsverläufe streben asymptotisch gegen einen Grenzwert, wie es der Verlauf der isotropen Verfestigung vorhergesagt hat.

Im nächsten Bild (Abbildung 9.46) wird von der Startorientierung $\theta_e = 0^\circ$ ausgegangen, und der Kopplungsparameter q variiert. Für den Wert $q = 1.0$ ergibt sich der typische kubische Spannungsverlauf. Dieser resultiert aus der fortlaufenden Rotation des Gitters. Für die Werte $q = 1.2$ und $q = 1.4$ erfolgt Stabilisation der Gitterrotation und somit auch ein asymptotischer Spannungsverlauf für σ_{13} .

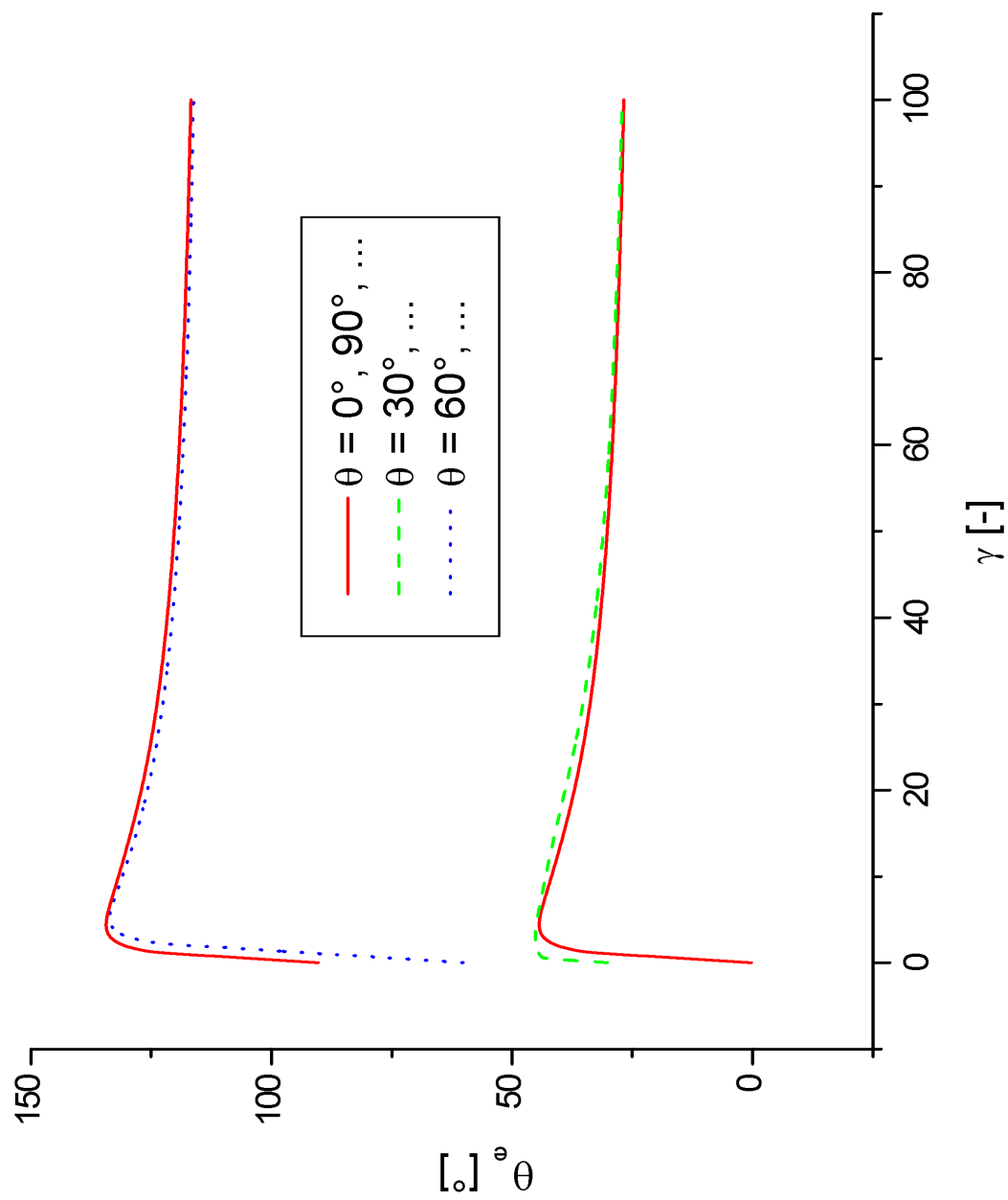


Abbildung 9.43: Kopplungsmöglichkeit 1: Winkel θ_e

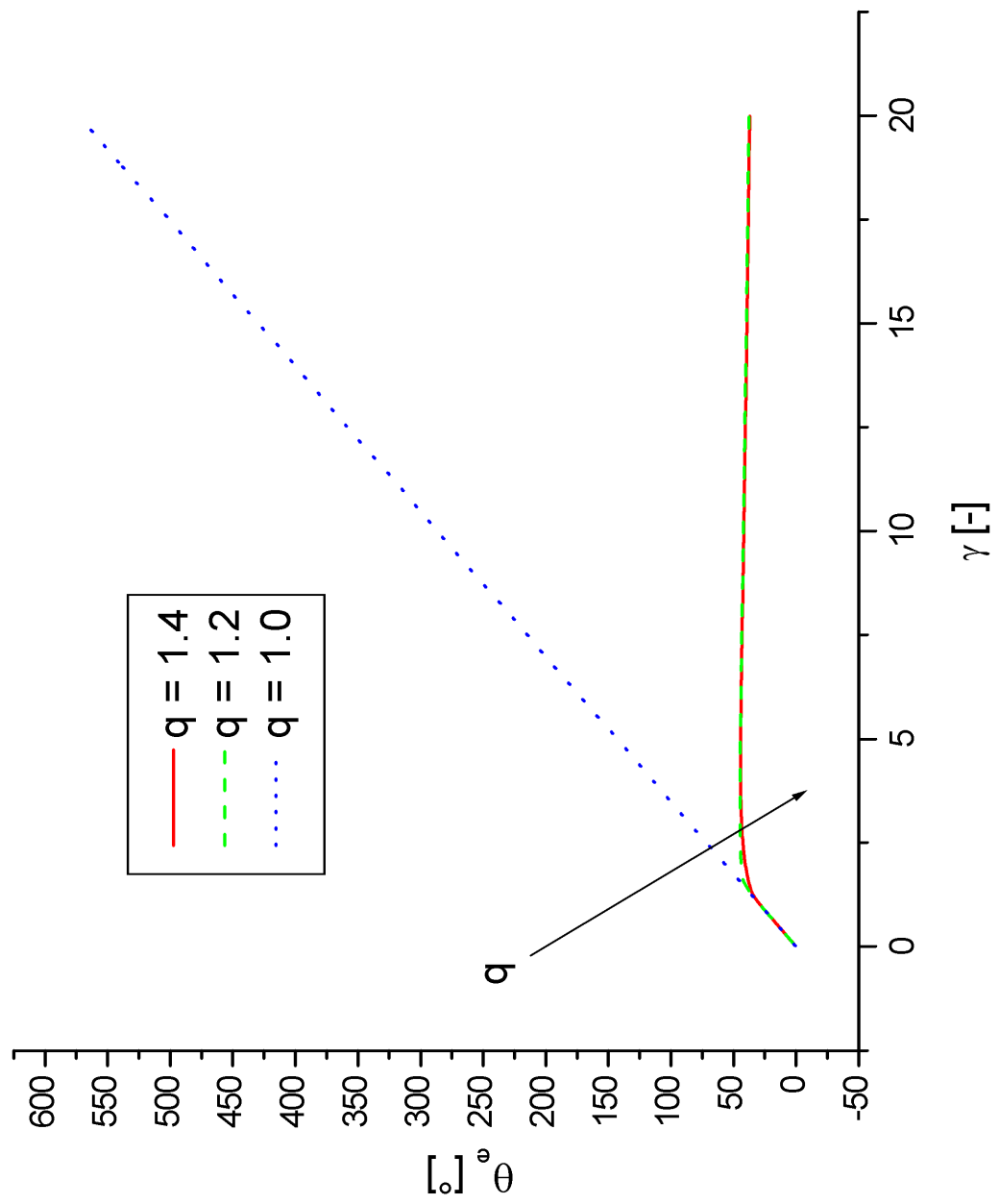


Abbildung 9.44: Kopplungsmöglichkeit 1: Winkel θ_e , verschiedene Parameter q

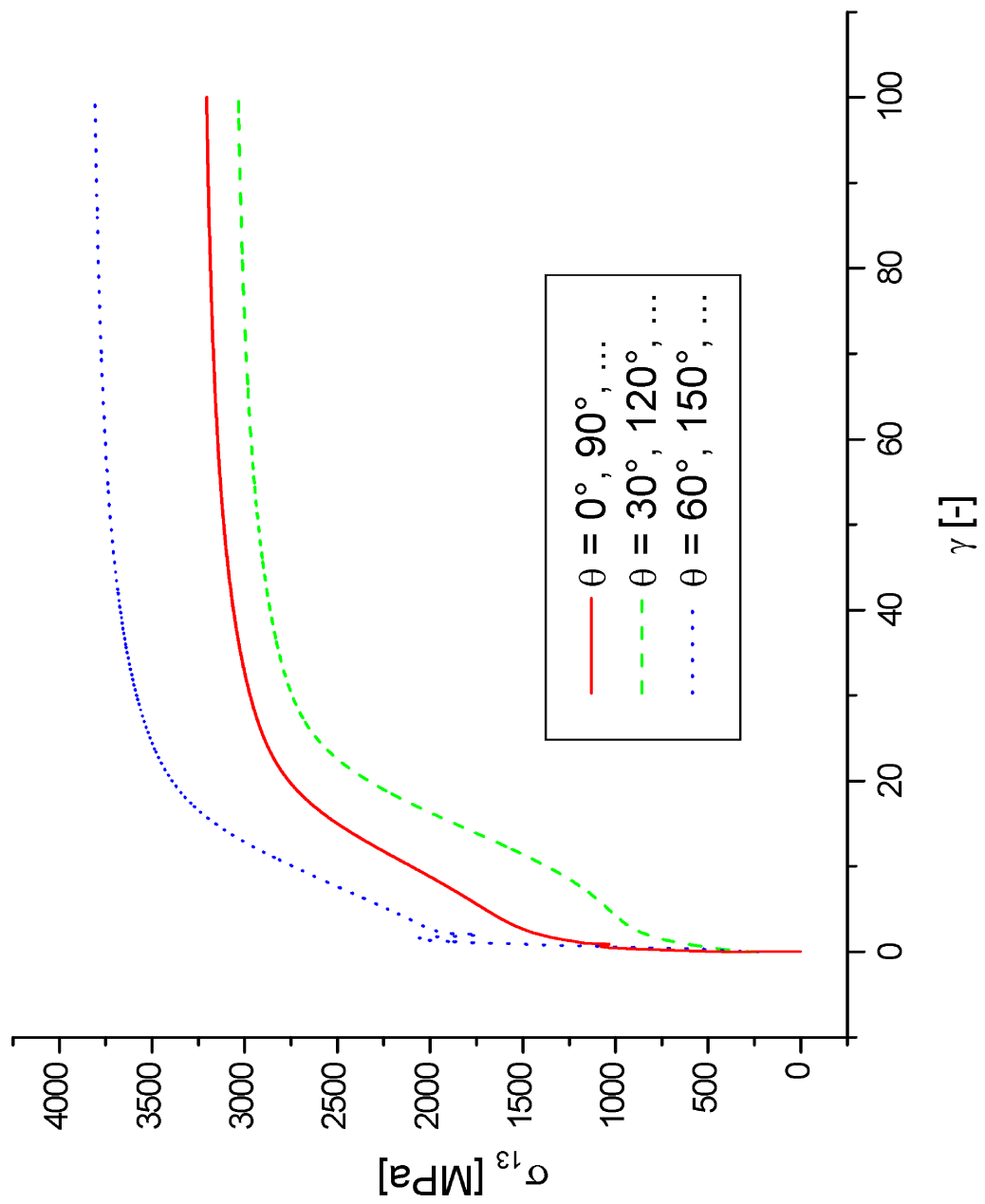


Abbildung 9.45: Kopplungsmöglichkeit 1: Spannung σ_{13}

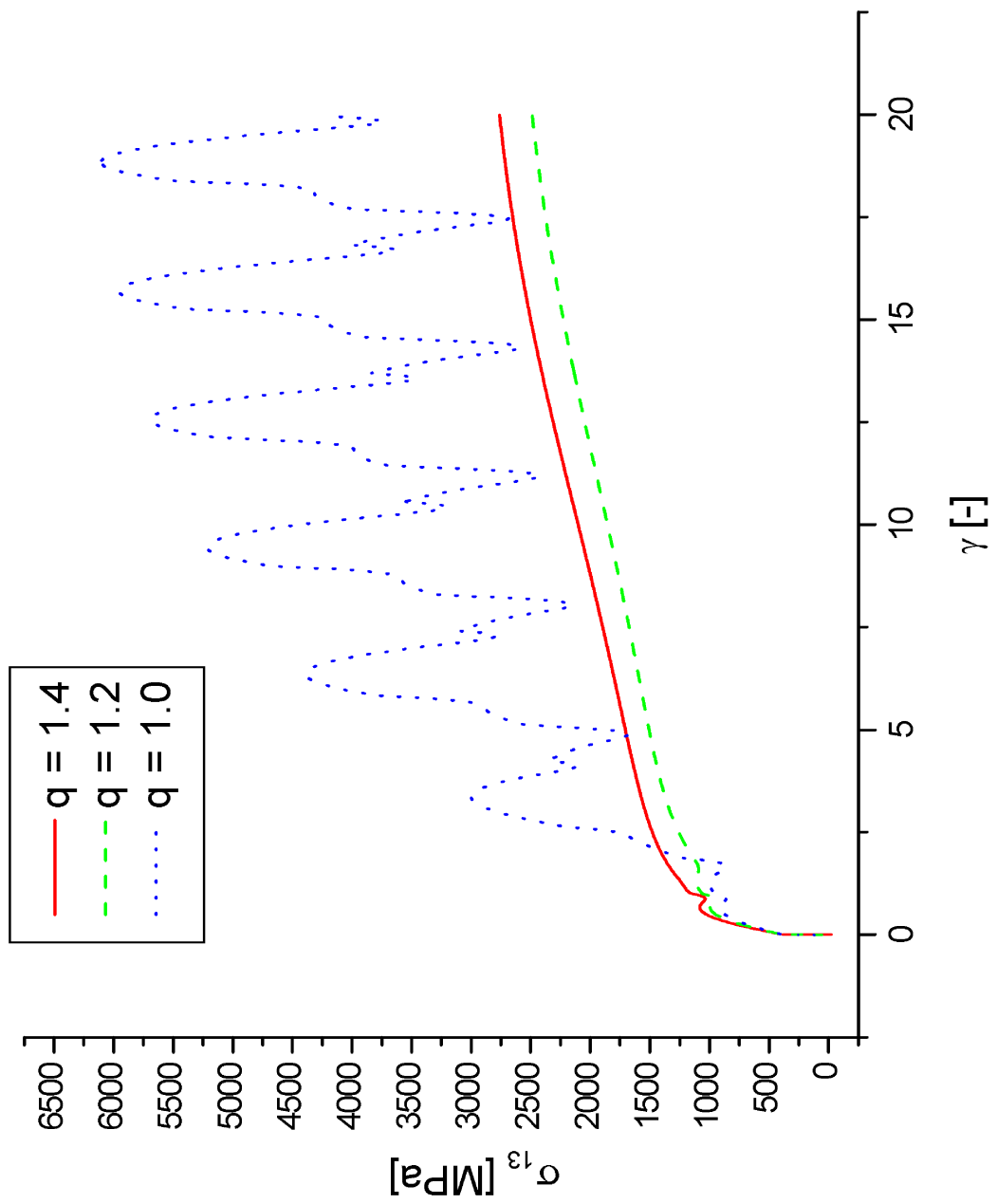


Abbildung 9.46: Kopplungsmöglichkeit 1: Spannung σ_{13} , verschiedene Parameter q

Nun folgen weitere Kopplungsmöglichkeiten.

Möglichkeit 2:

$$\dot{r}^{(\alpha)} = \left(\frac{\dot{s}^{(\alpha)}}{\dot{s}} - \beta^{(\alpha)} r^{(\alpha)} \right) \dot{s} \quad \text{mit} \quad \dot{s} = \sqrt{\sum_i (\dot{s}^{(i)})^2}$$

Folgende Materialkonstanten wurden verwendet:

λ	=	93000	MPa	μ	=	46500	MPa
m	=	4.0		η	=	20000	(MPa) ^m s
q	=	1.4		k_0	=	150	MPa
ζ	=	20		β	=	0.1	

Tabelle 9.9: Tabelle der Materialparameter für Kopplungsmöglichkeit 2

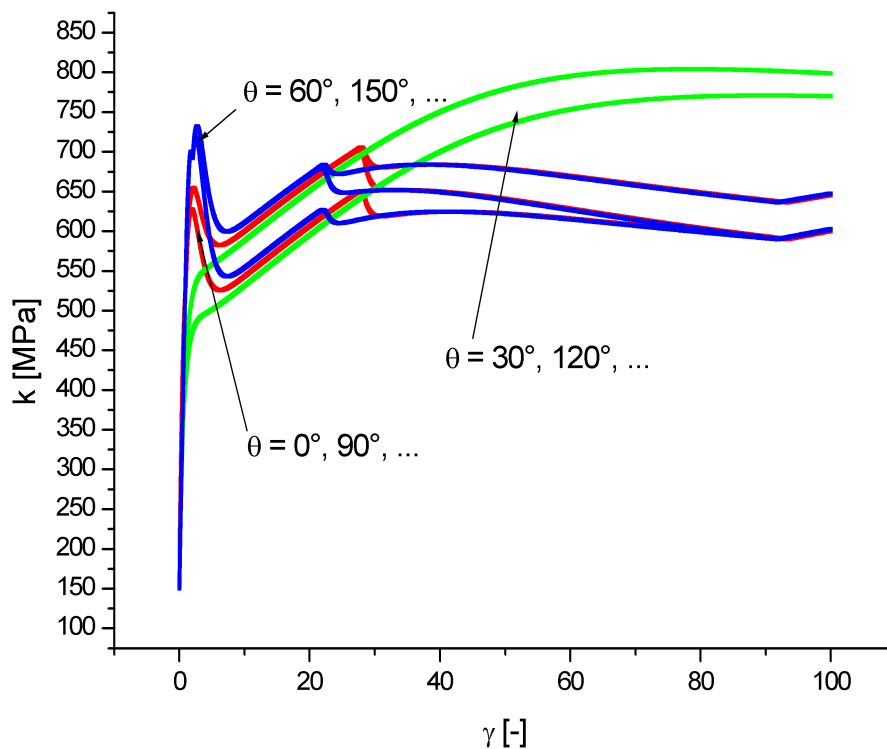


Abbildung 9.47: Darstellung der isotropen Verfestigung für $q = 1.4$ (Kopplungsmöglichkeit 2).

Beweis der thermodynamischen Konsistenz der Möglichkeit 2:

Unter der Annahme $r^{(\alpha)} \geq 0$ (dies ist noch zu zeigen) erfüllt die Kopplungsmöglichkeit 2 die Restungleichung (siehe 9.51):

$$\dot{s}^{(\alpha)} - \dot{r}^{(\alpha)} = \dot{s}\beta^{(\alpha)}r^{(\alpha)} \geq 0 \quad .$$

Hier ist $\beta^{(\alpha)}$ eine positive Konstante.

Beweis, daß $r^{(\alpha)} \geq 0$ ist:

Aus der Differentialgleichung für $\dot{r}^{(\alpha)}$ folgt durch Umformung:

$$\dot{r}^{(\alpha)} = \dot{s}^{(\alpha)} - \beta^{(\alpha)}r^{(\alpha)}\dot{s} \quad (9.83)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{r}^{(\alpha)}}{\dot{s}^{(\alpha)}} = 1 - \beta^{(\alpha)}r^{(\alpha)}\frac{\dot{s}}{\dot{s}^{(\alpha)}} \quad (9.84)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dr^{(\alpha)}}{ds^{(\alpha)}} = 1 - \beta^{(\alpha)}r^{(\alpha)}\frac{ds}{ds^{(\alpha)}} \quad (9.85)$$

$$\Leftrightarrow r^{(\alpha)} = \int_0^{s^{(\alpha)}} \left(1 - \beta^{(\alpha)}r^{(\alpha)}\frac{ds}{ds^{(\alpha)}}\right) d\bar{s}^{(\alpha)} \quad (9.86)$$

Zu Beginn ist $r^{(\alpha)} = 0$. Die Steigungen $\dot{r}^{(\alpha)}$ ist damit positiv ($\dot{r}^{(\alpha)} = \dot{s}^{(\alpha)}$) und die Kurve von $r^{(\alpha)}$ steigt in den positiven Bereich an. Solange $r^{(\alpha)} > 0$ ist, kann $\dot{r}^{(\alpha)}$ beliebiges Vorzeichen haben. Damit ist auch ein Absinken der isotropen Verfestigung möglich. Negativ kann $r^{(\alpha)}$ jedoch niemals werden, denn für $r^{(\alpha)} = 0$ erfolgt wieder ein Anstieg in den positiven Bereich ($\dot{r}^{(\alpha)} = \dot{s}^{(\alpha)} \geq 0$ für $r^{(\alpha)} = 0$).

Ergebnisse:

Auch hier sieht man eine Aufspaltung der isotropen Verfestigung (Abbildung 9.47 für die verschiedenen Anfangsorientierungen $\theta_e = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$).

Allerdings entwickelt sich die isotrope Verfestigung nur für die Anfangsorientierung $\theta_e = 30^\circ$ monoton steigend. Für die anderen Anfangsorientierungen ist Entfestigung sichtbar.

Diese Kopplungsmöglichkeit für die isotrope Verfestigung liefert hier physikalisch unsinnige Ergebnisse (die isotrope Verfestigung sollte in diesen Modellen immer ansteigen, da keine Entfestigungseffekte berücksichtigt werden).

Gitterrotation θ_e (Abbildung 9.48):

Als Anfangsorientierungen werden $\theta_e = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ gewählt. Auch hier sieht man wieder eine Stabilisierung der Gitterrotation. Die Grenzwerte liegen bei $\sim 30^\circ$ und $\sim 120^\circ$.

Spannungsverlauf σ_{13} (Abbildung 9.49):

Für die Anfangsorientierung $\theta_e = 30^\circ$ ergibt sich ein vernünftiger Spannungsverlauf, der sich asymptotisch einem Grenzwert nähert. Für diese Anfangsorientierung war ja die isotrope Verfestigung auch monoton ansteigend.

Für die anderen Anfangsorientierungen $\theta_e = 0^\circ$ und $\theta_e = 60^\circ$ zeigen die Spannungsverläufe Knicke bei einer Scherung von $\gamma \sim 20$, bei der die isotrope Verfestigung abfällt (Entfestigung).

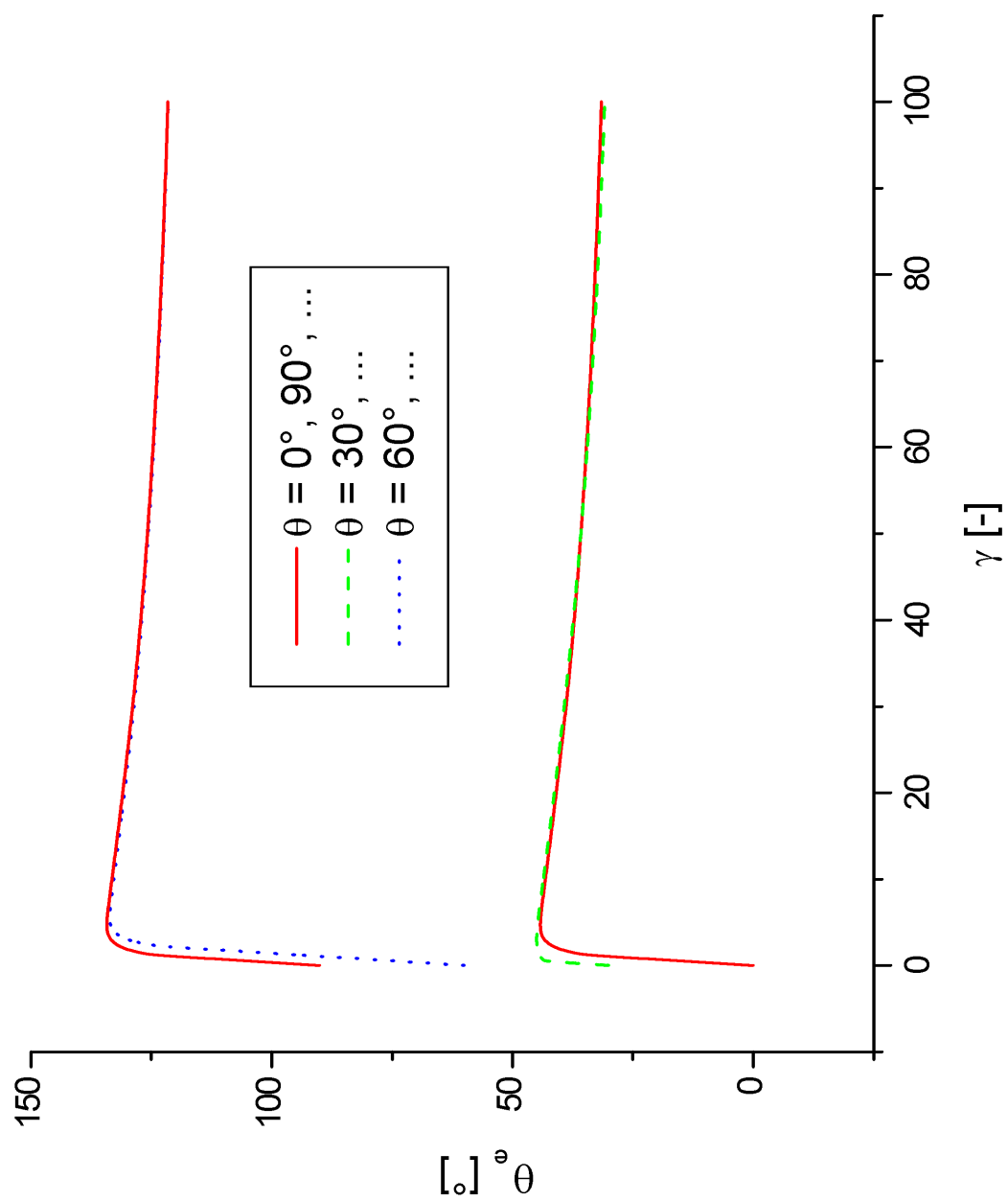


Abbildung 9.48: Kopplungsmöglichkeit 2: Winkel θ_e

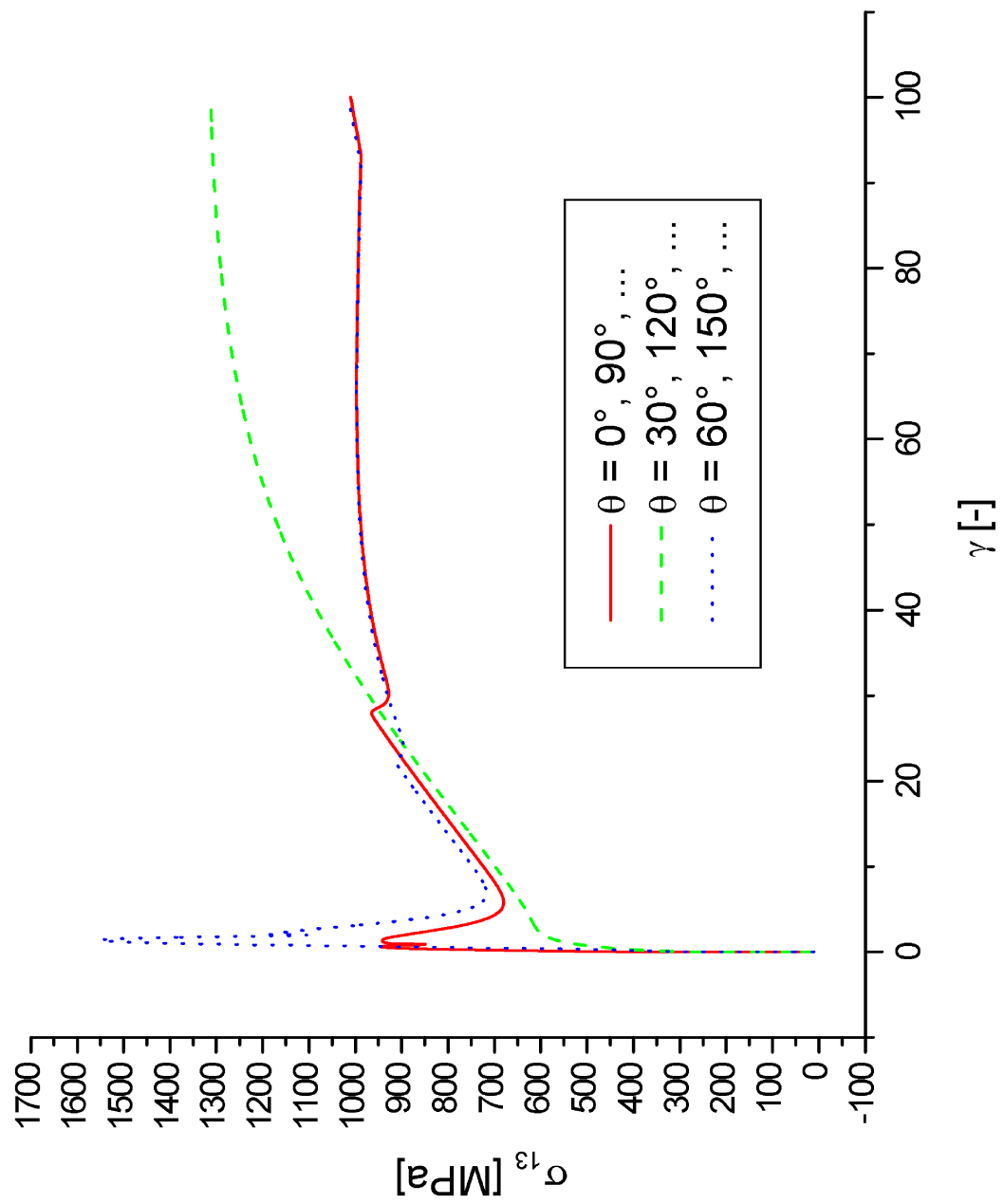


Abbildung 9.49: Kopplungsmöglichkeit 2: Spannung σ_{13}

Möglichkeit 3:

$$\dot{r}^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{A_0^{(\alpha)} \cdot r^{(\alpha)}}{1 + A_1^{(\alpha)} p^{(\alpha)}} \right) \dot{s}^{(\alpha)}$$

$$\text{mit } \dot{p}^{(\alpha)} = \begin{cases} 0 & \text{für } K_r \geq r_\infty \\ (1 - \beta_1^{(\alpha)} p^{(\alpha)}) \dot{r}^{(\alpha)} & \text{für } K_r < r_\infty \end{cases}$$

$$\text{und } K_r = \sum_{\alpha} r_\infty^{(\alpha)} \quad \text{mit } r_\infty^{(\alpha)} = \frac{1 + A_1^{(\alpha)} p^{(\alpha)}}{A_0^{(\alpha)}}$$

λ	=	93000	MPa	μ	=	46500	MPa
m	=	4.0		η	=	20000	(MPa) ^m s
q	=	1.4		k_0	=	150	MPa
ζ	=	20		β	=	0.1	
A_0	=	0.2		A_1	=	0.1	
r_∞	=	1500.0					

Tabelle 9.10: Tabelle der Materialparameter für Kopplungsmöglichkeit 3

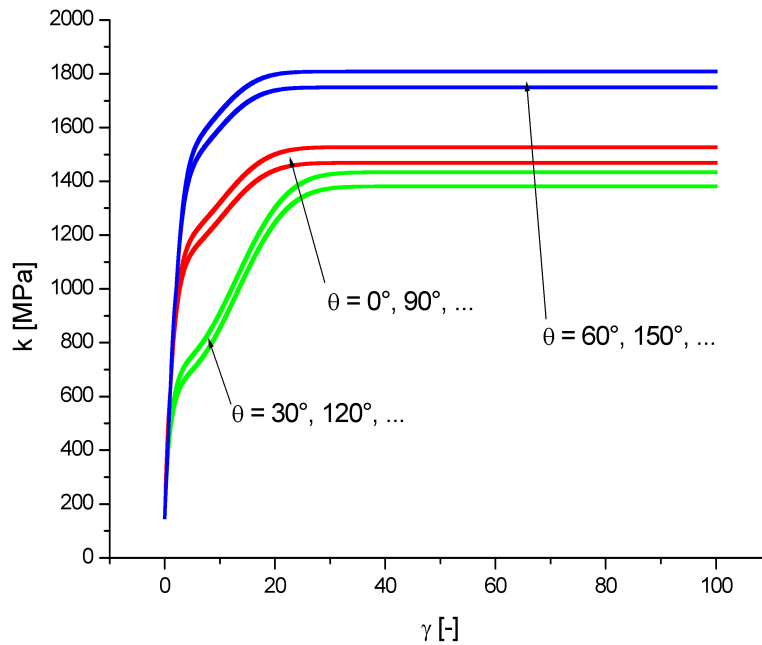


Abbildung 9.50: Darstellung der isotropen Verfestigung für $q = 1.4$ (Kopplungsmöglichkeit 3)

Beweis der thermodynamischen Konsistenz der Möglichkeit 3:

Aus der Restungleichung folgt unter anderem (siehe 9.51)

$$R^{(i)} = \zeta q^{(ij)} r^{(j)} \geq 0 \quad \text{und} \quad \dot{s}^{(i)} - \dot{r}^{(i)} \geq 0 \quad .$$

Dies muss durch den Ansatz für die Kopplungsmöglichkeit 3 erfüllt werden.

Unter der Annahme $r^{(i)} \geq 0$ (was natürlich bewiesen werden muss), genügt es zu zeigen, daß

$$\dot{s}^{(i)} - \dot{r}^{(i)} = \frac{A_0^{(i)} r^{(i)}}{1 + A_1^{(i)} p^{(i)}} \dot{s}^{(i)} \geq 0. \quad (9.87)$$

Dies ist der Fall, falls die Konstanten $A_0^{(i)} \geq 0$ und $A_1^{(i)} \geq 0$ sind.

Außerdem muss $p^{(i)} \geq 0$ sein. Wie man leicht sieht, ist aber unter der Annahme $\dot{r}^{(i)} \geq 0$ (was noch zu zeigen ist) und den Konstanten $\beta_1^{(i)} \geq 0$

$$p^{(i)}(t) = \frac{1 - e^{-\beta_1^{(i)} r^{(i)}(t)}}{\beta_1^{(i)}} \geq 0$$

und somit $p^{(i)} \geq 0$ gesichert.

Nun ist noch $\dot{r}^{(i)} \geq 0$ und somit $r^{(i)} \geq 0$ zu zeigen:

Dazu wird die Differentialgleichung

$$\dot{r}^{(i)} = \left(1 - \frac{A_0^{(i)} r^{(i)}}{1 + A_1^{(i)} p^{(i)}} \right) \dot{s}^{(i)}$$

umgeschrieben zu

$$\frac{dr^{(i)}}{ds^{(i)}} = \left(1 - \frac{A_0^{(i)} r^{(i)}}{1 + A_1^{(i)} p^{(i)}} \right) \quad . \quad (9.88)$$

Diese Gleichung stellt ein *Feld von Tangentenvektoren* in jedem Punkt $\{s^{(i)}, r^{(i)}\}$ an die Kurven $r^{(i)}(s^{(i)})$ dar.

Zu Beginn ($r^{(i)} = 0$) ist

$$\frac{dr^{(i)}}{ds^{(i)}} = 1 \geq 0 \quad \forall s^{(i)} \quad (9.89)$$

und somit jede Kurve $r^{(i)}(s^{(i)})$ monoton steigend.

Dies sieht man auch auf der Abszisse in Bild (9.51) (Index (i) weggelassen).

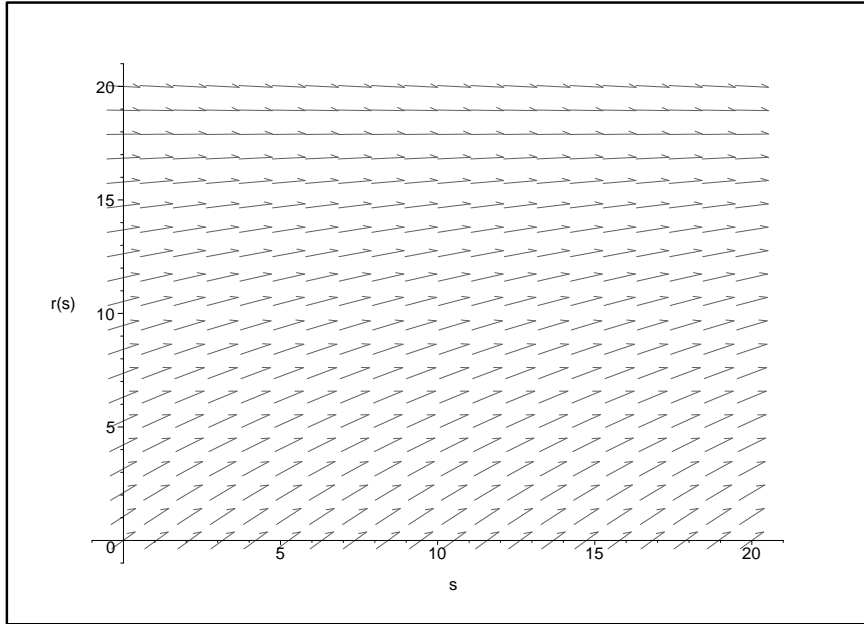


Abbildung 9.51: Vektorfeld von $\frac{dr^{(i)}}{ds^{(i)}} = \left(1 - \frac{A_0^{(i)} r^{(i)}}{1 + A_1^{(i)} p^{(i)}}\right)$

Für ansteigendes $r^{(i)}(s^{(i)})$ nimmt die Steigung des Vektorfeldes immer mehr ab, bis die Steigung für $r^{(i)}(s^{(i)}) = 20.0$ null wird und somit in eine Horizontale übergeht.

Somit ist

$$r^{(i)}(s^{(i)}) \geq 0 \quad \forall s^{(i)} \quad (9.90)$$

gesichert.

Da für $r^{(i)}(t)$

$$\frac{dr^{(i)}}{dt} = \frac{dr^{(i)}}{ds^{(i)}} \frac{ds^{(i)}}{dt} \quad (9.91)$$

gilt und die Steigung der plastischen Bogenlänge

$$\frac{ds^{(i)}}{dt} \geq 0 \quad , \quad (9.92)$$

ist die zu fordernde Bedingung $r^{(i)}(s^{(i)}(t)) \geq 0$ erfüllt.

Ergebnisse:

Auch hier sieht man ein Aufspalten der isotropen Verfestigung (Abbildung 9.50) für verschiedene Anfangsorientierungen θ_e . Mit dieser Kopplungsmöglichkeit erreichen die Kurven für die Anfangsorientierung $\theta_e = 0^\circ$ und $\theta_e = 60^\circ$ schneller ihren Grenzwert als bei der Kopplungsmöglichkeit 1.

Gitterrotation θ_e (Abbildung 9.52):

Als Anfangsorientierungen werden $\theta_e = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ gewählt. Auch hier sieht man wieder eine Stabilisierung der Gitterrotation. Die Grenzwerte liegen bei $\sim 30^\circ$ und $\sim 120^\circ$.

Spannungsverlauf σ_{13} (Abbildung 9.53):

Die Spannungen streben asymptotisch einem Grenzwert zu, der für die jeweilige Ausgangsorientierungen θ_e verschieden ist.

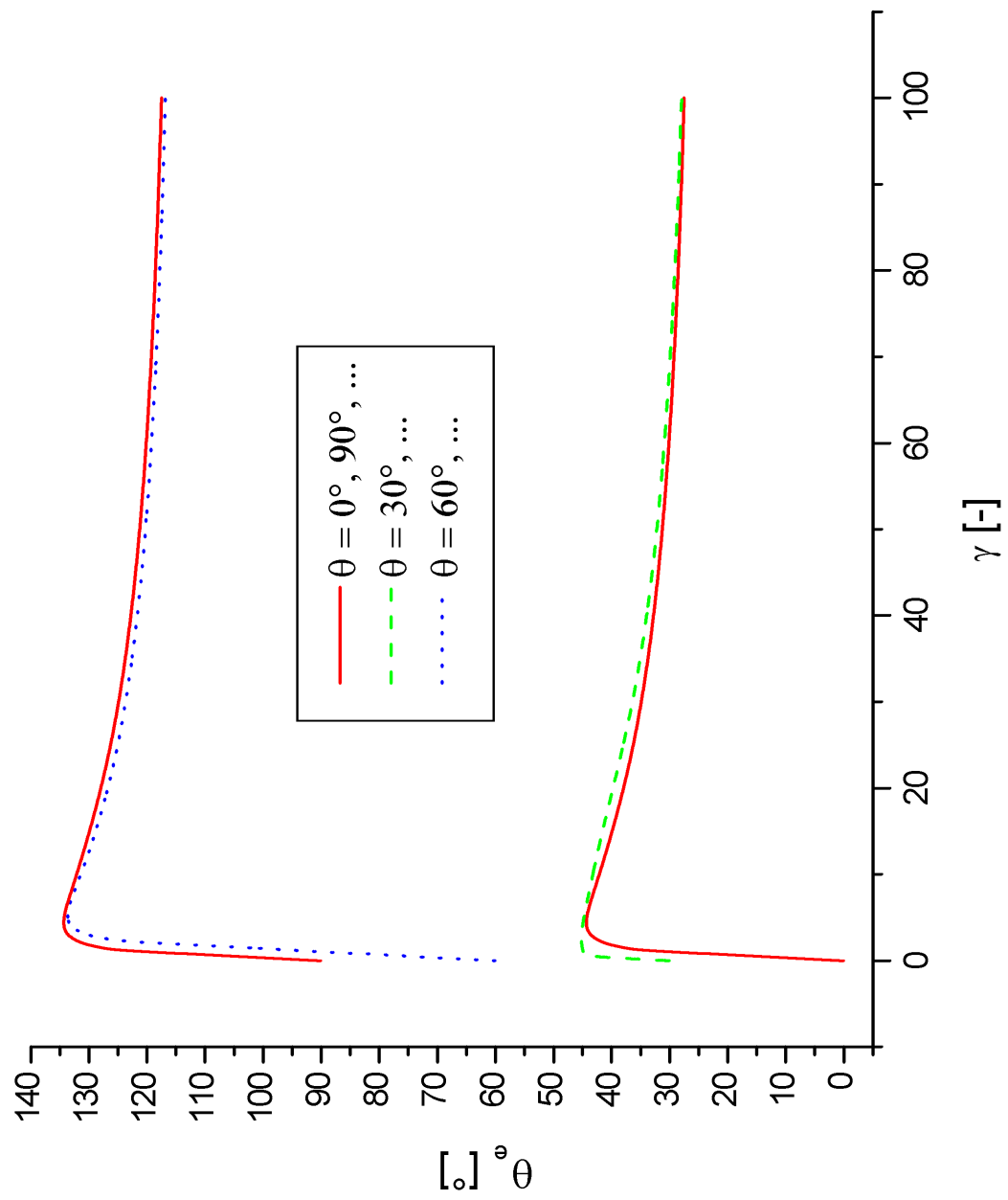


Abbildung 9.52: Kopplungsmöglichkeit 3: Winkel θ_e

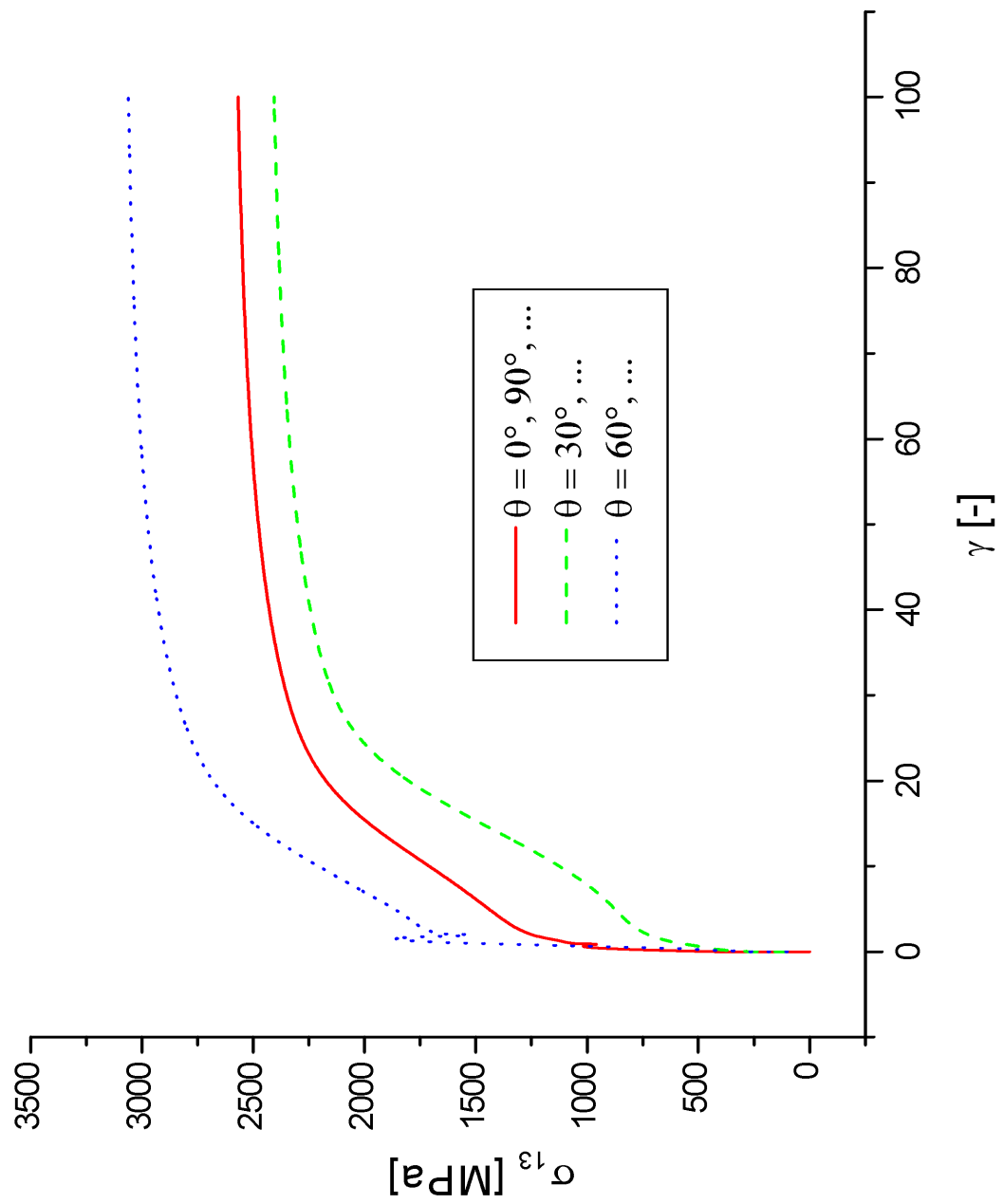


Abbildung 9.53: Kopplungsmöglichkeit 3: Spannung σ_{13}

Möglichkeit 4:

$$\dot{r}^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{A_0^{(\alpha)} \cdot r^{(\alpha)}}{1 + A_1^{(\alpha)} e^{-\beta_2^{(\alpha)} p^{(\alpha)}} \right) \dot{s}^{(\alpha)} \quad (9.93)$$

$$\text{mit } \dot{p}^{(\alpha)} = \begin{cases} 0 & \text{für } K_r \geq r_\infty \\ \dot{r}^{(\alpha)} & \text{für } K_r < r_\infty \end{cases}$$

$$\text{und } K_r = \sum_{\alpha} r_\infty^{(\alpha)} \quad \text{mit } r_\infty^{(\alpha)} = \frac{1 + A_1^{(\alpha)} e^{-\beta_2^{(\alpha)} p^{(\alpha)}}}{A_0^{(\alpha)}}$$

λ	=	93000	MPa	μ	=	46500	MPa
m	=	4.0		η	=	20000	(MPa) ^m s
q	=	1.4		k_0	=	150	MPa
ζ	=	20		β_2	=	0.1	
A_0	=	0.1		A_1	=	0.2	
r_∞	=	1500.0					

Tabelle 9.11: Tabelle der Materialparameter für Kopplungsmöglichkeit 4

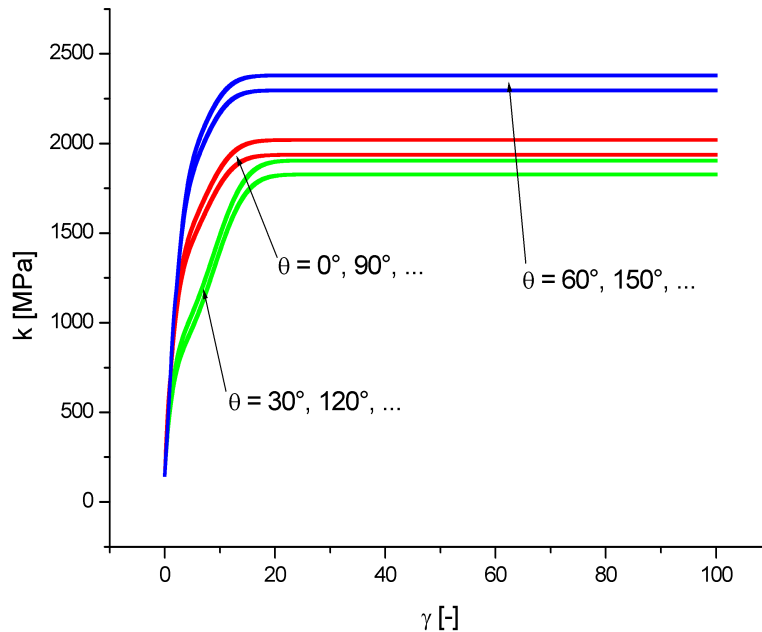


Abbildung 9.54: Darstellung der isotropen Verfestigung für $q = 1.4$ (Kopplungsmöglichkeit 4)

Beweis der thermodynamischen Konsistenz der Möglichkeit 4:

Aus der Restungleichung folgt unter anderem (siehe 9.51)

$$R^{(i)} = \zeta q^{(ij)} r^{(j)} \geq 0 \quad \text{und} \quad \dot{s}^{(i)} - \dot{r}^{(i)} \geq 0 \quad .$$

Dies muss durch den Ansatz für die Kopplungsmöglichkeit 4 erfüllt werden.

Unter der Annahme $r^{(i)} \geq 0$ (was natürlich bewiesen werden muss), genügt es zu zeigen, daß

$$\dot{s}^{(i)} - \dot{r}^{(i)} = \frac{A_0^{(i)} r^{(i)}}{1 + A_1^{(i)} e^{-\beta_2^{(i)} p^{(i)}}} \dot{s}^{(i)} \geq 0. \quad (9.94)$$

Dies ist der Fall, falls die Konstanten $A_0^{(i)} \geq 0$ und $A_1^{(i)} \geq 0$ sind. Die Konstanten $\beta_2^{(i)}$ sind frei wählbar.

Nun ist noch $\dot{r}^{(i)} \geq 0$ und somit $r^{(i)} \geq 0$ zu zeigen:
Dazu wird die Differentialgleichung

$$\dot{r}^{(i)} = \left(1 - \frac{A_0^{(i)} r^{(i)}}{1 + A_1^{(i)} e^{-\beta_2^{(i)} p^{(i)}}} \right) \dot{s}^{(i)}$$

umgeschrieben zu

$$\frac{dr^{(i)}}{ds^{(i)}} = \left(1 - \frac{A_0^{(i)} r^{(i)}}{1 + A_1^{(i)} e^{-\beta_2^{(i)} p^{(i)}}} \right) \quad . \quad (9.95)$$

Diese Gleichung stellt ein *Feld von Tangentenvektoren* in jedem Punkt $\{s^{(i)}, r^{(i)}\}$ an die Kurven $r^{(i)}(s^{(i)})$ dar.

Zu Beginn ($r^{(i)} = 0$) ist

$$\frac{dr^{(i)}}{ds^{(i)}} = 1 \geq 0 \quad \forall s^{(i)} \quad (9.96)$$

und somit jede Kurve $r^{(i)}(s^{(i)})$ monoton steigend.

Dies sieht man auch auf der Abszisse in Bild (9.55) (Index (i) weggelassen).

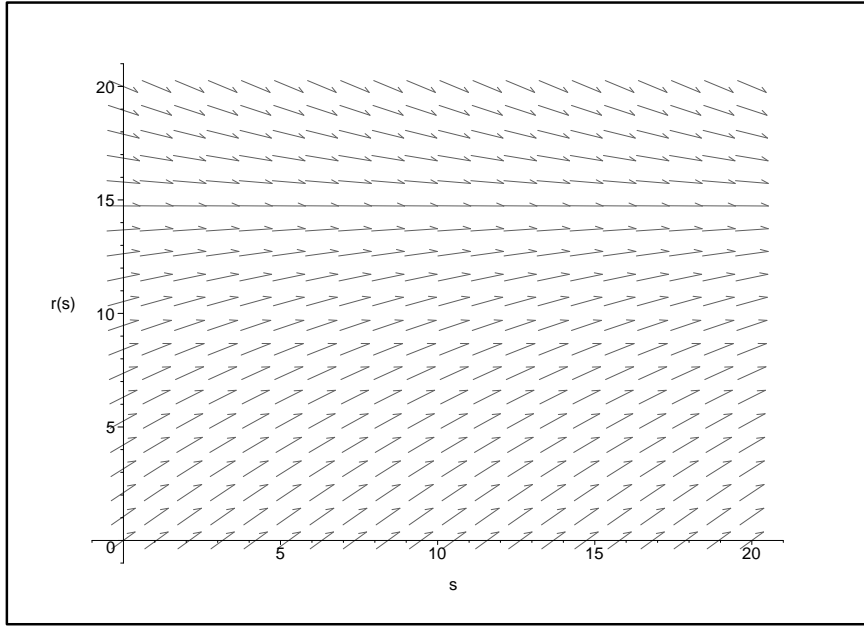


Abbildung 9.55: Vektorfeld von $\frac{dr^{(i)}}{ds^{(i)}} = \left(1 - \frac{A_0^{(i)} r^{(i)}}{1 + A_1^{(i)} e^{-\beta_2^{(i)} p^{(i)}}}\right)$

Für ansteigendes $r^{(i)}(s^{(i)})$ nimmt die Steigung des Vektorfeldes immer mehr ab, bis die Steigung für $r^{(i)}(s^{(i)}) = 15.0$ null wird und somit in eine Horizontale übergeht.

Somit ist

$$r^{(i)}(s^{(i)}) \geq 0 \quad \forall s^{(i)} \quad (9.97)$$

gesichert.

Da für $r^{(i)}(t)$

$$\frac{dr^{(i)}}{dt} = \frac{dr^{(i)}}{ds^{(i)}} \frac{ds^{(i)}}{dt} \quad (9.98)$$

gilt und die Steigung der plastischen Bogenlänge

$$\frac{ds^{(i)}}{dt} \geq 0 \quad , \quad (9.99)$$

ist die zu fordernde Bedingung $r^{(i)}(s^{(i)}(t)) \geq 0$ erfüllt.

Ergebnisse:

Auch diese Kopplungsmöglichkeit erlaubt eine Aufspaltung der isotropen Verfestigung (Abbildung 9.54).

Gitterrotation θ_e (Abbildung 9.56):

Als Anfangsorientierungen werden $\theta_e = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ gewählt. Auch hier sieht man eine Stabilisierung der Gitterrotation. Die Grenzwerte liegen bei $\sim 30^\circ$ und $\sim 120^\circ$.

Spannungsverlauf σ_{13} (Abbildung 9.57):

Die Spannungen streben asymptotisch einem Grenzwert an, der für die jeweilige Ausgangsorientierungen θ_e verschieden ist.

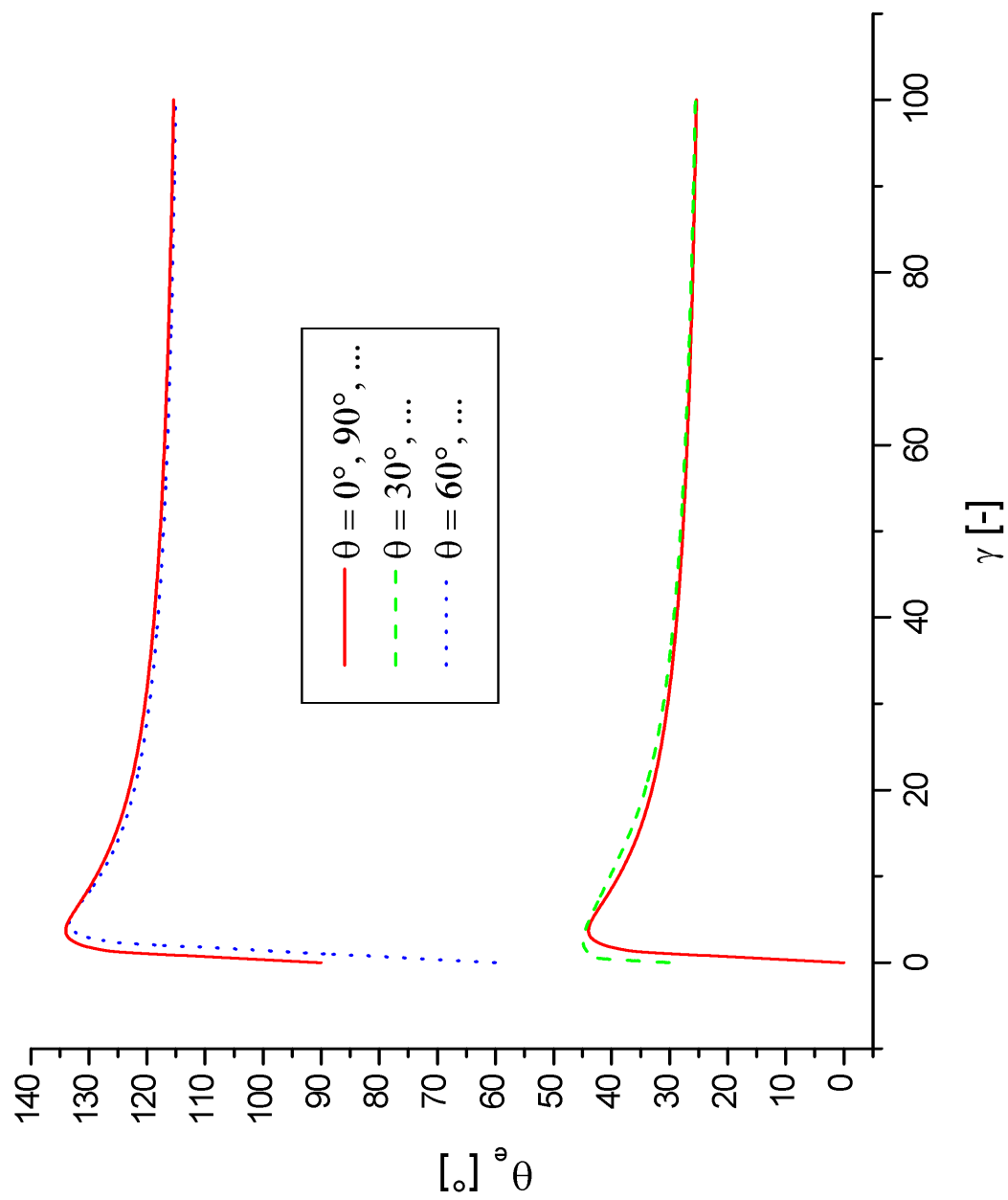


Abbildung 9.56: Kopplungsmöglichkeit 4: Winkel θ_e

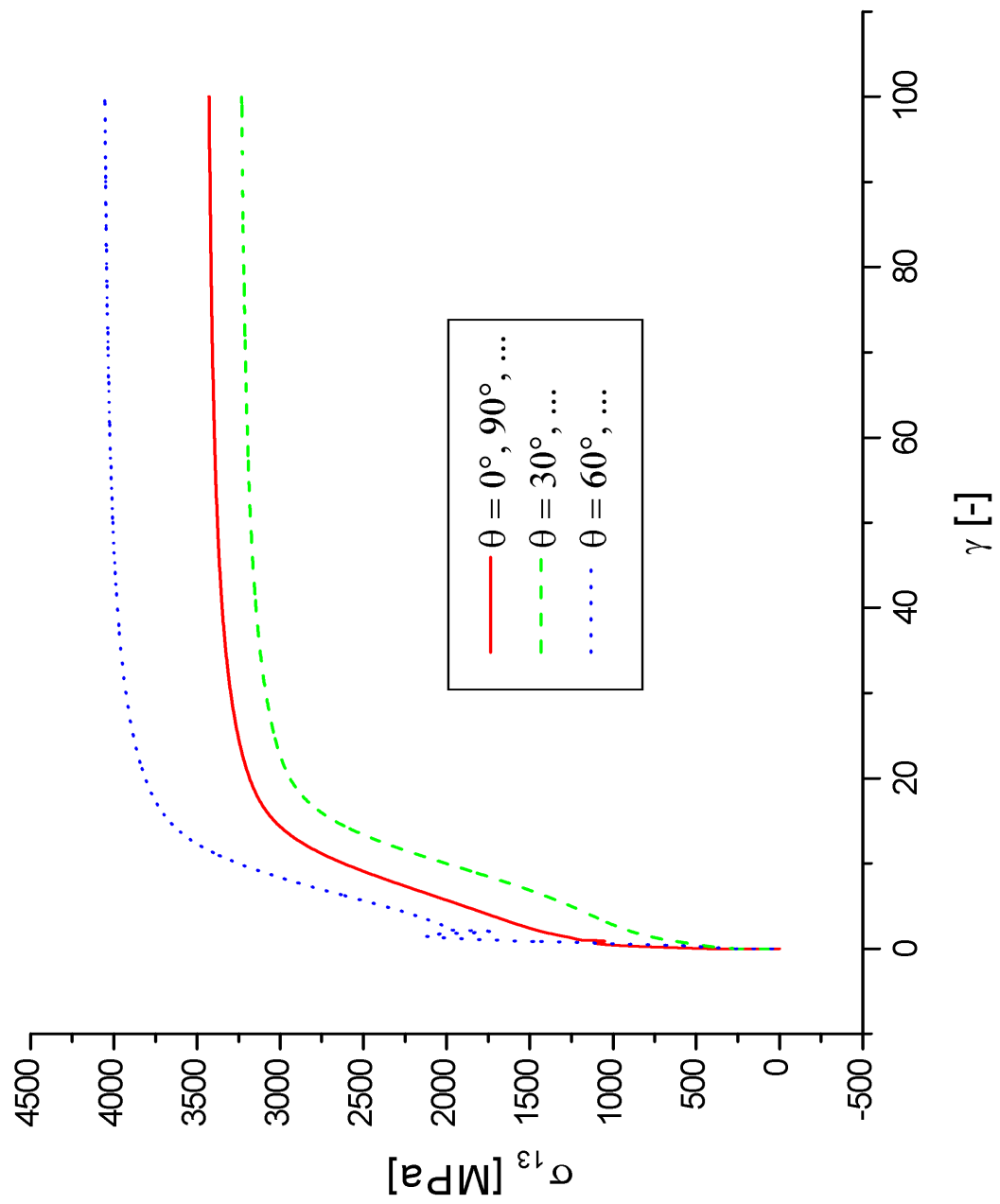


Abbildung 9.57: Kopplungsmöglichkeit 4: Spannung σ_{13}